INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXI. BAND FÜNFTES UND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1953

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 15,80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Rittnertstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. F. Schleicher, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Iguchi, S., Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. Mit 27 Textabbildungen 303

Szablewski, W., Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. Mit 8 Textabbildungen 323

Woinowsky-Krieger, S., Über die Biegung von Platten durch Einzellasten mit rechteckiger Aufstandsfläche. Mit 5 Textabbildungen 331

Krettner, J., Beitrag zur Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Schalen 339

Dahme, A., Berechnung der spezifischen inneren Oberfläche poröser Körper. Mit 5 Textabbildungen 346

Lein, G., Die Torsionssteifigkeit von kreuzförmigen Querschnitten. Mit 13 Textabbildungen 352

Tolle, O., Die Trägheitspolkurve der Schubstange eines zentrischen Schubkurbelgetriebes (Näherungslösung). Mit 3 Textabbildungen 365

Stange, K., Über die Gesetze der Kornverteilung bei Zerkleinerungsvorgängen. Mit 13 Textabbildungen 368

Koiter, W. T., Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz des Herrn Woinowsky-Krieger im Ingenieur-Archiv Bd. XX., Seite 391. Mit 1 Textabbildung 381

Maier, E., Theorie des muldenförmigen Verschleißes im Blasversatzrohr. Mit 15 Textabbildungen 382

Pöschl, Th., Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten. (II. Mitteilung.) Mit 2 Textabbildungen 396

Deuker, E. A., Die strenge Lösung der Eigenwertaufgabe für den Kippstab. Mit 1 Textabbildung 399

Strscheletzky, M., Berichtigung zu meiner Arbeit in Bd. XIX, S. 313 des Ingenieur-Archivs 408

INGENIEUR-ARCHIV

XXI. BAND FÜNFTES UND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1953

Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte.

Von S. Iguchi.

1. Einleitung. Die Eigenschwingungserscheinungen der elastischen quadratischen Platte mit freien Rändern sind schon seit Anfang des letzten Jahrhunderts durch die von *E.F.F. Chladni*[1] experimentell hergestellten Sandfiguren (Klangfiguren) wohlbekannt. Seit jener Zeit haben zahlreiche Forscher, nämlich *Ch. Wheatstone*[2], *F. Strehlke*[3], *R. König*[4], *S. Tanaka*[5], *Lord Rayleigh*[6], u. a. das genannte Problem entweder experimentell oder analytisch untersucht und bedeutende und interessante Leistungen auf dem Gebiet der Akustik und Elastizitätslehre geschaffen. Was aber die theoretischen Untersuchungen betrifft, so sind sie alle wegen der Schwierigkeiten der Randbedingungen der Platte nur Näherungslösungen.

Im Beginn dieses Jahrhunderts ist die wertvolle Arbeit von *W. Ritz*[7] erschienen, in welcher er das Problem unter Benutzung der Eigenfunktionen für den geraden Stab mit freien Enden mittels der Energiemethode gelöst hat. Insbesondere ist bemerkenswert, daß die aus seinen Formeln folgenden Klangfiguren mit nur geringen Abweichungen im Einklang mit den *Chladni*schen Figuren stehen. Trotzdem ist dies auch eine Näherungslösung; denn seine Formeln genügen nicht vollständig den Randbedingungen der Platte. So blieb es bis jetzt offen, das Problem streng zu lösen.

Im folgenden suche ich die Lösungen zu geben, welche sowohl die Differentialgleichung als auch die Plattenrandbedingungen vollständig befriedigen. Die Schwingungsflächen werden nach ihren Gestalten in drei Arten klassifiziert. Als Anwendungsbeispiel meiner Formeln werden die den verschiedenen Tonhöhen jeder Schwingungsart entsprechenden 23 Eigenwerte ausgerechnet. Dazu noch werden die daraus hervorgehenden 35 Knotenfiguren der Schwingungsfläche, also die Klangfiguren angegeben, die mit den ebenso von mir als auch von *Chladni* experimentell gebildeten Sandfiguren hinlänglich gut übereinstimmen.

2. Allgemeine Erörterung. a) Die Grundgleichung. Ist w die Auslenkung zur Zeit t an der Stelle (x, y) der Mittelebene einer dünnen Platte, dann gilt für die Biegeschwingungen die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w + \frac{\varrho h}{N}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Hierin bedeutet ϱ die Plattendichte und N die Plattensteifigkeit, d.h. $Eh^3/12(1-\nu^2)$, wenn h die Plattendicke, E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl des Stoffes ist.

Bezeichnet man nun mit w' eine nur von den Veränderlichen x und y abhängige Funktion, also die Eigenfunktion, und mit ω die Kreisfrequenz der Eigenschwingungen, so wird w durch das Produkt

$$w = w' \cos \omega t \tag{2}$$

ausgedrückt. Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$\Delta\Delta w' - \frac{\omega^2 \varrho h}{N} w' = 0\,, \tag{3}$$

woraus man die Funktion w' zu ermitteln hat.

---

[1] *Chladni*, Akustik. Leipzig 1802; Neudruck 1830.
[2] *Ch. Wheatstone*, Phil. Trans., 1833.
[3] *F. Strehlke*, Pogg. Ann. 95 (1855), 146 (1872).
[4] *R. König*, Pogg. Ann. 122 (1864).
[5] *S. Tanaka*, Ann. Phys. 32 (1887).
[6] *Lord Rayleigh*, Theory of Sound I S. 372.
[7] *W. Ritz*, Ann. Phys. 28 (1909), S. 737.

b) Die allgemeine Lösung und die Randbedingungen. Es handelt sich jetzt um die Auflösung der Differentialgleichung (3). Mit Unterdrückung der Zwischenrechnung ergibt sich für die durch Abb. 1 dargestellte rechteckige Platte die allgemeine Lösung

$$\left.\begin{aligned} w' &= \sum_n X_n \cos n\pi\left(\frac{1}{2}+\eta\right) + \sum_m Y_m \cos m\pi\left(\frac{1}{2}+\xi\right), \\ \xi &\equiv \frac{x}{a}, \qquad \eta \equiv \frac{y}{b} \qquad\qquad (m, n = 0, 1, 2 \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} X_n &= A_n \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_{\alpha n}\xi}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n}} + A'_n \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda'_{\alpha n}\xi}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}} + A''_n \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_{\alpha n}\xi}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n}} + A'''_n \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda'_{\alpha n}\xi}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}}, \\ Y_m &= B_m \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m}} + B'_m \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda'_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\lambda'_{\beta m}} + B''_m \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m}} + B'''_m \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda'_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}\lambda'_{\beta m}}, \end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\lambda_{\alpha n}\\ \lambda'_{\alpha n}\end{matrix}\right| &= \sqrt{\alpha^2 n^2 \pm \mu}, \qquad \mu = \frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\varrho h}{N}}, \qquad \alpha \equiv \frac{a}{b}, \\ \left.\begin{matrix}\lambda_{\beta m}\\ \lambda'_{\beta m}\end{matrix}\right| &= \sqrt{\beta^2 m^2 \pm \mu'}, \qquad \mu' = \frac{\omega b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\varrho h}{N}}, \qquad \beta \equiv \frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{4c}$$

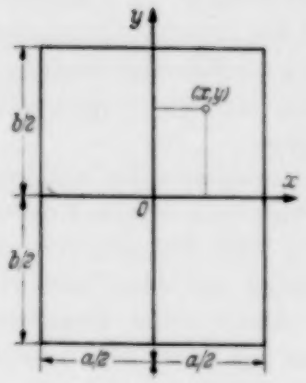


Abb. 1. Schema der Koordinatenachsen.

Da die Kreisfrequenz, die Schwingungsdauer bzw. -frequenz der Platte durch

$$\omega = \frac{\pi^2 \mu}{a^2}\sqrt{\frac{N}{\varrho h}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{bzw.} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

ausgedrückt wird, so ist es die Hauptaufgabe der weiteren Rechnungen, die den verschiedenen Schwingungsarten entsprechenden dimensionslosen Größen μ oder μ' auszusuchen.

Die in (4b) enthaltenden Integrationskonstanten müssen miteinander so verknüpft werden, daß die allgemeine Lösung (4a) den Randbedingungen der Platte, nämlich

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{für} \quad x = \pm\frac{a}{2}. \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{für} \quad y = \pm\frac{b}{2}. \tag{b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right] = 0 \qquad \text{für} \quad x = \pm\frac{a}{2}, \tag{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right] = 0 \qquad \text{für} \quad y = \pm\frac{b}{2} \tag{d}$$

genügt. Für die Platte mit vollkommen freien Rändern (ohne Eckstütze) muß auch der Differentialquotient $\frac{\partial^2 w'}{\partial x\,\partial y}$ in den vier Ecken der Platte verschwinden. Man sieht aber leicht, daß die Lösung (4a) von vornherein diese Forderung erfüllt[1].

Da nun die erste und dritte Ableitung von $\cos m\pi(\frac{1}{2}+\xi)$ für den Sonderwert $\xi = \pm\frac{1}{2}$ verschwindet, so geht aus den Randbedingungen (c) eine einfache Beziehung

$$\frac{a^3}{\pi^3} X'''_n\left(\pm\frac{a}{2}\right) - \alpha^2 n^2 (2-\nu)\frac{a}{\pi} X'_n\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0$$

hervor, deren Lösung mit den neu eingeführten Beiwerten a_n und a'_n die Beziehungen

$$A_n = \frac{a_n}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda_{\alpha n}^2 - \nu\alpha^2 n^2), \qquad A'_n = -\frac{a_n}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\alpha^2 n^2),$$

$$A''_n = \frac{a'_n}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda_{\alpha n}^2 - \nu\alpha^2 n^2), \qquad A'''_n = -\frac{a'_n}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\alpha^2 n^2)$$

[1] Für die Platte, die nur an den vier Eckpunkten aufliegt, muß $\sin m\pi(1/2+\xi)$ bzw. $\sin n\pi(1/2+\eta)$ an Stelle von $\cos m\pi(1/2+\xi)$ bzw. $\cos n\pi(1/2+\eta)$ in (4a) geschrieben werden, so daß die Auslenkung w' in den Plattenecken verschwindet.

liefert. Somit läßt sich jetzt die Funktion X_n in die Form

$$\left.\begin{aligned} X_n &= a_n\, u_{\alpha n}(\xi) + a'_n\, v_{\alpha n}(\xi)\,, \\ u_{\alpha n}(\xi) &= \frac{1}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2\, n^2)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\,\lambda_{\alpha n}\,\xi}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda_{\alpha n}} - \frac{1}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^{\,2}_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2\, n^2)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\,\lambda'_{\alpha n}\,\xi}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda'_{\alpha n}}\,, \\ v_{\alpha n}(\xi) &= \frac{1}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2\, n^2)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\,\lambda_{\alpha n}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda_{\alpha n}} - \frac{1}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^{\,2}_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2\, n^2)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\,\lambda'_{\alpha n}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda'_{\alpha n}} \end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

bringen.

Ganz analog erhält man infolge der Randbedingungen (d)

$$\left.\begin{aligned} Y_m &= b_m\, u_{\beta m}(\eta) + b'_m\, v_{\beta m}(\eta)\,, \\ u_{\beta m}(\eta) &= \frac{1}{\lambda_{\beta m}}(\lambda^2_{\beta m} - \nu\,\beta^2\, m^2)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\,\lambda_{\beta m}\,\eta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda_{\beta m}} - \frac{1}{\lambda'_{\beta m}}(\lambda'^{\,2}_{\beta m} - \nu\,\beta^2\, m^2)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\,\lambda'_{\beta m}\,\eta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda'_{\beta m}}\,, \\ v_{\beta m}(\eta) &= \frac{1}{\lambda_{\beta m}}(\lambda^2_{\beta m} - \nu\,\beta^2\, m^2)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\,\lambda_{\beta m}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda_{\beta m}} - \frac{1}{\lambda'_{\beta m}}(\lambda'^{\,2}_{\beta m} - \lambda\,\beta^2\, m^2)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\,\lambda'_{\beta m}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\lambda'_{\beta m}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5b)$$

Die Gleichung (4a) mit den durch (5a) und (5b) dargestellten Funktionen befriedigt natürlich die Randbedingungen (c) und (d), und die in (5a) und (5b) noch verfügbaren Beiwerte a_n, a'_n, b_m, b'_m werden durch die übrigen Randbedingungen (a) und (b) miteinander verknüpft. Die diesbezüglichen weiteren Rechnungen werden in den kommenden Einzelfällen durchgeführt.

Mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos m\pi\left(\frac{1}{2} + \xi\right) &= \cos\frac{m\pi}{2}\cos m\pi\xi - \sin\frac{m\pi}{2}\sin\pi\xi\,, \\ &= (-1)^{m/2}\cos m\pi\xi \qquad \text{für } m = 0, 2, 4, \ldots\,, \\ &= (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\pi\xi \qquad \text{für } m = 1, 3, 5 \ldots \end{aligned}$$

merken wir vorläufig an, daß die Zeiger m in (4a) bis (5b) die geraden bzw. ungeraden Zahlen durchlaufen, je nachdem die Platte symmetrisch bzw. antisymmetrisch in bezug auf die Mittellinie $\xi = 0$ schwingt. Analog müssen die Zeiger n die geraden bzw. ungeraden Zahlen durchlaufen, wenn die Schwingungsfläche der Platte sich symmetrisch bzw. antisymmetrisch in bezug auf die Mittellinie $\eta_j = 0$ gestaltet. Zur Betrachtung der Symmetrie- sowie der Antisymmetrieeigenschaft der Schwingungsfläche ist noch zu berücksichtigen, daß die beiden Funktionen X_n und Y_m aus Summen von geraden und ungeraden Funktionen bestehen.

3. Die erste Schwingungsart. a) Die allgemeinen Formeln. Wir wollen uns erstens mit dem Falle beschäftigen, in dem die Schwingungsfläche symmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien $\xi = 0$ und $\eta_j = 0$ des Rechtecks ist. In einer derartigen Schwingungsfläche müssen die Beiwerte a'_n in (5a) und b'_m in (5b) verschwinden, während die beiden Zeiger m und n die geraden Zahlen durchlaufen. So ergibt sich

$$w' = \sum_n a_n\, u_{\alpha n}(\xi)\,(-1)^{n/2}\cos n\pi\eta + \sum_m b_m\, u_{\beta m}(\eta_j)\,(-1)^{m/2}\cos m\pi\xi \quad (m, n = 0, 2, 4, \ldots) \qquad (6a)$$

oder auch

$$w' = a_0\, u_{\alpha 0}(\xi) + b_0\, u_{\beta 0}(\eta_j) + \sum_n a_n\, u_{\alpha n}(\xi)\,(-1)^{n/2}\cos n\pi\eta_j + \sum_m b_m\, u_{\beta m}(\eta_j)\,(-1)^{m/2}\cos m\pi\xi$$
$$(m, n = 2, 4, 6, \ldots) \qquad (6b)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} u_{\alpha 0}(\xi) &= \lim_{n\to 0} u_{\alpha n}(\xi) = \sqrt{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\mu}\,\xi}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} - \frac{\cos\pi\sqrt{\mu}\,\xi}{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}}\right), \\ u_{\beta 0}(\eta_j) &= \lim_{m\to 0} u_{\beta m}(\eta_j) = \sqrt{\mu'}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\mu'}\,\eta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}} - \frac{\cos\pi\sqrt{\mu'}\,\eta}{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6c)$$

Diese Gleichung (6b) mit (6c) befriedigt natürlich von vornherein sowohl die vorliegenden Symmetriebedingungen als auch die Randbedingungen (c) und (d). Aus den Randbedingungen

(a) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a_0 \frac{a^2}{\pi^2} u''_{\alpha 0}\left(\pm\frac{a}{2}\right) + \sum_n a_n (-1)^{n/2}\left[\frac{a^2}{\pi^2} u''_{\alpha n}\left(\pm\frac{a}{2}\right) - \nu\alpha^2 n^2 u_{\alpha n}\left(\pm\frac{a}{2}\right)\right]\cos n\pi\eta \\ + b_0 \frac{\nu a^2}{\pi^2} u''_{\beta 0}(\eta_j) - \sum_m b_m\left[m^2 u_{\beta m}(\eta_j) - \frac{\nu a^2}{\pi^2} u''_{\beta m}(\eta_j)\right] = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m}} &= \frac{4\lambda_{\beta m}}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda_{\beta m}^2} + \sum_n \frac{(-1)^{n/2}}{n^2+\lambda_{\beta m}^2}\cos n\pi\eta_j\right), \\ \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\mu'}\,\eta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}} &= \frac{4\sqrt{\mu'}}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu'} + \sum_n \frac{(-1)^{n/2}}{n^2+\mu'}\cos n\pi\eta_j\right), \\ &\left(-\frac{1}{2} \le \eta_j \le \frac{1}{2}\right), \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

kann man die Funktionen für η in (*) in *Fourier*sche Reihen nach $\cos n\pi\eta$ entwickeln. Damit geht (*) über in

$$\begin{aligned} &a_0\mu\sqrt{\mu}\left(\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right) + \frac{4\nu\alpha^2\mu'}{\pi}\left(b_0 - \sum_m b_m \frac{\mu'^2}{\lambda_{\beta m}^2 \lambda_{\beta m}'^2}\right) \\ &+ \sum_n \left\{ a_n\left[\frac{1}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda_{\alpha n}^2 - \nu\alpha^2 n^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n} - \frac{1}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\alpha^2 n^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}\right]\right. \\ &\left. - \frac{8\mu'}{\pi}\left[b_0 \frac{\nu\alpha^2\mu'^2}{n^4 - \mu'^2} + \sum_m b_m \frac{(1-\nu)^2 m^2 n^2 + \nu\alpha^2\mu'^2}{(n^2+\lambda_{\beta m}^2)(n^2+\lambda_{\beta m}'^2)}\right]\right\}(-1)^{n/2}\cos n\pi\eta_j = 0 . \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von η_j erfüllt sein soll, so muß die Summe der konstanten Glieder und der mit $\cos n\pi\eta_j$ behaftete Ausdruck je für sich verschwinden. Also erhält man

$$\left.\begin{aligned} c\,a_0 + \frac{4\nu\alpha^2\mu'}{\pi}\left[b_0 - \sum_r b_r \frac{\mu'^2}{\beta^4 r^4 - \mu'^2}\right] = 0 , \\ a_n H_{\alpha n} - \frac{8\mu'}{\pi}\left[b_0 \frac{\nu\alpha^2\mu'^2}{n^4-\mu'^2} + \sum_r b_r \frac{(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\alpha^2\mu'^2}{(n^2+\beta^2 r^2)^2 - \mu'^2}\right] = 0 \\ (r = 2, 4, 6\ \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} H_{\alpha n} &\equiv \frac{1}{\lambda_{\alpha n}}(\lambda_{\alpha n}^2 - \nu\alpha^2 n^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n} - \frac{1}{\lambda'_{\alpha n}}(\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\alpha^2 n^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}, \\ c &= \lim_{n\to 0} H_{\alpha n} \equiv \mu\sqrt{\mu}\left(\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right). \end{aligned}\right\} \quad (8b)$$

Analog folgt aus den Randbedingungen (b)

$$\left.\begin{aligned} c'\,b_0 + \frac{4\nu\beta^2\mu}{\pi}\left[a_0 - \sum_s a_s \frac{\mu^2}{\alpha^4 s^4 - \mu^2}\right] = 0 , \\ b_m H_{\beta m} - \frac{8\mu}{\pi}\left[a_0 \frac{\nu\beta^2\mu^2}{m^4-\mu^2} + \sum_s a_s \frac{(1-\nu)^2 m^2 s^2 + \nu\beta^2\mu^2}{(m^2+\alpha^2 s^2)^2 - \mu^2}\right] = 0 \\ (s = 2, 4, 6, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} H_{\beta m} &\equiv \frac{1}{\lambda_{\beta m}}(\lambda_{\beta m}^2 - \nu\beta^2 m^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m} - \frac{1}{\lambda'_{\beta m}}(\lambda'^2_{\beta m} - \nu\beta^2 m^2)^2\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\beta m}, \\ c' &= \lim_{m\to 0} H_{\beta m} \equiv \mu'\sqrt{\mu'}\left(\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'} + \operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9b)$$

In den vorangehenden Gleichungen (8a) bis (9b) ist in den Summationszeichen r bzw. s an Stelle von m bzw. n geschrieben, um weiterhin Verwechslungen zu vermeiden.

Aus der ersten Gleichung (8a) und der ersten (9a) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\nu\mu'}{\pi}\,\frac{c'\alpha^2\sum_r \frac{b_r\mu'^2}{\beta^4 r^4-\mu'^2} - \frac{4\nu\mu}{\pi}\sum_s \frac{a_s\mu^2}{\alpha^4 s^4-\mu^2}}{c\,c' - \frac{16\nu^2\mu\mu'}{\pi^2}}\,, \\ b_0 &= \frac{4\nu\mu}{\pi}\,\frac{c\beta^2\sum_s \frac{a_s\mu^2}{\alpha^4 s^4-\mu^2} - \frac{4\nu\mu'}{\pi}\sum_r \frac{b_r\mu'^2}{\beta^4 r^4-\mu'^2}}{c\,c' - \frac{16\nu^2\mu\mu'}{\pi^2}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Durch geeignete weitere Rechnungen kann man aus (8a) bis (10) die Frequenzgleichung ableiten. Da aber die diesbezüglichen allgemeinen Rechnungen für die Rechteckplatte ($a \neq b$) ziemlich mühsam sind, so werden sie bei der Untersuchung der quadratischen Platte im nächsten Abschnitte angegeben.

b) Die Formeln und die Rechenergebnisse für die quadratische Platte. Wegen $m = n = 2, 4, 6 \ldots$, $\alpha = \beta = 1$, $\mu' = \mu$ für die quadratische Platte kann man in allen Formeln hierfür einfacher λ_n für $\lambda_{\alpha n}$ und $\lambda_{\beta m}$, λ'_n für $\lambda'_{\alpha n}$ und $\lambda'_{\beta m}$, u_n für $u_{\alpha n}$ und $u_{\beta m}$ schreiben.

1. *Die erste Familie.* Es handelt sich jetzt um die erste Familie der ersten Schwingungsart, in der die Platte symmetrisch in bezug nicht nur auf ihre beiden Mittellinien, sondern auch auf ihre beiden Diagonalen schwingt. Die Funktion w' für eine derartige Schwingungsfläche hat die Eigenschaft

$$w'(x, y) = w'(y, x)$$

oder aus (6a)

$$w'(x, y) - w'(y, x) = \sum_n (-1)^{n/2}(a_n - b_n)\,[u_n(\xi)\cos n\pi\eta_j - u_n(\eta_j)\cos n\pi\xi] = 0\,.$$

Diese Forderung wird erfüllt, wenn

$$a_n = b_n \qquad (a_0 = b_0)$$

ist. Somit vereinfacht sich der Ausdruck für w' (6b), wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} w' &= a_2\,\overline{w}', \\ \overline{w}' &= \alpha_0[u_0(\xi) + u_0(\eta_j)] + \sum_n (-1)^{n/2}\alpha_n[u_n(\xi)\cos n\pi\eta_j + u_n(\eta_j)\cos n\pi\xi] \\ &\qquad\qquad (n = 2, 4, 6 \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

mit

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{a_2} = \frac{2\nu}{\frac{\pi c}{2\mu} + 2\nu}\sum_s \frac{\alpha_s\mu^2}{s^4-\mu^2}\,, \qquad \alpha_n = \frac{a_n}{a_2} \qquad (\alpha_2 = 1)\,.$$

Der Ausdruck für $u_0(\xi)$ und $u_0(\eta_j)$ ist derselbe wie in (6c) mit $\mu' = \mu$.

Da ferner $b_0 = a_0$, $b_m = a_n$ ist, so schreibt sich die zweite Gleichung (8a), wie folgt:

$$a_n H_n - \frac{8\mu}{\pi}\left[a_0\frac{\nu\mu^2}{n^4-\mu^2} + \sum_s a_s\frac{(1-\nu)^2 n^2 s^2 + \nu\mu^2}{(n^2+s^2)^2-\mu^2}\right] = 0\,; \qquad (*)$$

darin bedeutet

$$a_0 = \frac{2\nu}{\frac{\pi c}{2\mu} + 2\nu}\sum_s \frac{a_s\mu^2}{s^4-\mu^2}\,.$$

Durch Einführung dieses Ausdrucks für a_0 in (*) erhält man

$$\left.\begin{aligned} &a_n + \sum_s K_{ns}\,a_s = 0 \qquad (n, s = 2, 4, 6 \ldots) \\ &\text{mit} \\ &K_{ns} = -\frac{8\mu}{\pi H_n}\left[\frac{2\nu^2\mu^4}{\left(\frac{\pi c}{2\mu} + 2\nu\right)(n^4-\mu^2)(s^4-\mu^2)} + \frac{(1-\nu)^2 n^2 s^2 + \nu\mu^2}{(n^2+s^2)^2-\mu^2}\right], \\ &H_n \equiv \frac{(n^2 - \nu n^2 + \mu)^2}{\sqrt{n^2+\mu}}\operatorname{Ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+\mu} - \frac{(n^2-\nu n^2-\mu)^2}{\sqrt{n^2-\mu}}\operatorname{Ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\mu}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die erste Gleichung (12) stellt ein System von unendlich vielen homogen lienaren Gleichungen für die unbekannten Beiwerte a_n $(= a_2, a_4, \ldots)$ dar. Da nicht alle a_n verschwinden können, so muß die aus den Koeffizienten bestehende Determinante verschwinden. Also wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+K_{22} & K_{24} & K_{26} & K_{28} & \cdots \\ K_{42} & 1+K_{44} & K_{46} & K_{48} & \cdots \\ K_{62} & K_{64} & 1+K_{66} & K_{68} & \cdots \\ K_{82} & K_{84} & K_{86} & 1+K_{88} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung, durch deren Auflösung man die den verschiedenen Tonhöhen dieser Schwingungsfamilie entsprechenden Eigenwerte μ findet[1].

Es ist leicht ersichtlich, daß die Zahlenfolge K_{ns} $(n, s = 2, 4, 6 \ldots)$ recht gut konvergiert. So würde die Determinantengleichung $\Delta = 0$ mit den ersten drei oder vier Zeilen und Spalten hinreichend genaue Wurzeln liefern. In den nachfolgenden numerischen Rechnungen benutze ich immer die Determinante mit den ersten vier Zeilen und Spalten. So sind die Rechenergebnisse für die quadratische Platte mit $\nu = 0{,}3$, wie folgt:

1. Wurzel	2. Wurzel	3. Wurzel	4. Wurzel	5. Wurzel
$\mu = 2{,}45909$	6,45284	12,40626	17,07149	30,38952

Zur Untersuchung der Gestalt der Schwingungsfläche sowie der Klangfiguren der Platte genügt es, nur die Funktion $\overline{w}'$ (11) anstatt von w' zu betrachten; denn die wirkliche Auslenkung des Punktes (x, y) zu irgendeiner Zeit ist proportional zu $\overline{w}'$. So ist es jetzt nötig, die Werte der unbekannten Beiwerte α_n auszurechnen. Dividiert man zu diesem Zwecke die erste Gleichung (12) durch a_2, so erhält man

$$\alpha_n + \sum_s K_{ns}\,\alpha_s = 0 \qquad (\alpha_2 = 1) \qquad (14a)$$

oder mit der anderen Schreibweise, $c_{ns} = K_{ns}$ für $n \neq s$, $c_{nn} = 1 + K_{nn}$ für $n = s$

$$\left.\begin{aligned} c_{22} + c_{24}\,\alpha_4 + c_{26}\,\alpha_6 + c_{28}\,\alpha_8 &= 0\,, \\ c_{42} + c_{44}\,\alpha_4 + c_{46}\,\alpha_6 + c_{48}\,\alpha_8 &= 0\,, \\ c_{62} + c_{64}\,\alpha_4 + c_{66}\,\alpha_6 + c_{68}\,\alpha_8 &= 0\,, \\ c_{82} + c_{84}\,\alpha_4 + c_{86}\,\alpha_6 + c_{88}\,\alpha_8 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (14b)$$

Diese vier Gleichungen für die drei Unbekannten α_4, α_6, α_8 liefern vier verschiedene Systeme der drei Gleichungen, aus deren Lösungen vier Wurzeln für jede Unbekannte hervorgehen. Aber sie müssen untereinander gleich sein, wenn die Bedingung (Frequenzgleichung), daß die aus allen Koeffizienten bestehende Determinante gleich Null wird, genau erfüllt würde. Es ist jedoch fast unmöglich, die Wurzeln μ, mit denen die Determinante genau gleich Null wird, aufzufinden. So zum Beispiel ergeben die wirklichen Rechnungen

$$\Delta = \begin{cases} 0{,}00006 & \text{für} \quad \mu = 2{,}45909, \\ -0{,}00001 & \text{für} \quad \mu = 6{,}45284, \\ -0{,}00004 & \text{für} \quad \mu = 12{,}40626 \end{cases}$$

Mithin muß ein Fehler auf der rechten Seite jeder Gleichung (14b) hinzugefügt werden, und die wahrscheinlichsten Werte von α_4, α_6, α_8 sind aus den Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [c_{n4}\,c_{n2}] + [c_{n4}\,c_{n4}]\,\alpha_4 + [c_{n4}\,c_{n6}]\,\alpha_6 + [c_{n4}\,c_{n8}]\,\alpha_8 &= 0\,, \\ [c_{n6}\,c_{n2}] + [c_{n6}\,c_{n4}]\,\alpha_4 + [c_{n6}\,c_{n6}]\,\alpha_6 + [c_{n6}\,c_{n8}]\,\alpha_8 &= 0\,, \\ [c_{n8}\,c_{n2}] + [c_{n8}\,c_{n4}]\,\alpha_4 + [c_{n8}\,c_{n6}]\,\alpha_6 + [c_{n8}\,c_{n8}]\,\alpha_8 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (n = 2, 4, 6, 8) \qquad (14c)$$

zu finden. Mit Unterdrückung der numerischen Zwischenrechnungen sind nur die Rechenergebnisse in Tabelle 1 zusammengestellt.

Nachdem die Werte von μ und α_n ermittelt sind, liegt es nahe, die Auslenkung $\overline{w}'$ (11) eines beliebigen Punktes (x, y) auszurechnen und daraus die Knotenlinien $\overline{w}' = 0$ zu bestimmen. Die so gebildeten Knotenlinien werden in Abb. 2 und die zu der zweiten Wurzel $\mu = 6{,}45284$ bzw. der fünften $\mu = 30{,}38952$ gehörenden Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche (mit dem Wert $\overline{w}'$ des Eckpunktes $(a/2, a/2)$ als Einheit) in Abb. 3 bzw. 4 gezeigt.

[1] Vgl. *S. Iguchi*, Ing.-Arch. 7 (1936) S. 207; 8 (1937) S. 11.

Tabelle 1. *Die Werte von μ und der verschiedenen Beiwerte für die erste Familie der ersten Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.*

	μ	n	α_n	λ_n	$\lambda_n^2 - \nu n^2$	λ_n'	$\lambda_n'^2 - \nu n^2$	Abb. 2. Knotenlinien.
1. Wurzel	2,45909	0	8,51935	—	—	—	—	(I)
		2	1,00000	2,54147	5,25909	1,24133	0,34091	
		4	0,04225	4,29641	13,65909	3,67990	8,74091	
		6	0,01173	6,20154	27,65909	5,79145	22,74091	
		8	0,00494	8,15225	47,25909	7,84480	42,34091	
2. Wurzel	6,45284	0	—0,11966	—	—	—	—	(II)
		2	1,00000	3,23309	9,25284	1,56615i *	—3,65284	
		4	0,03422	4,73844	17,65284	3,08985	4,74716	
		6	0,01065	6,51558	31,65284	5,43573	18,74716	
		8	0,00473	8,39362	51,25284	7,58598	38,34716	
3. Wurzel	12,40626	0	—8,81714	—	—	—	—	(III)
		2	1,00000	4,05046	15,20626	2,89935i	—9,60626	
		4	—1,19356	5,32975	23,60626	1,89572	—1,20626	
		6	—0,08213	6,95746	37,60626	4,85734	12,79374	
		8	—0,02402	8,74107	57,20626	7,18288	32,39374	
4. Wurzel	17,07149	0	—0,07482	—	—	—	—	(IV)
		2	1,00000	4,59037	19,87149	3,61545i	—14,27149	
		4	0,44885	5,75078	28,27149	1,03513i	—5,87149	
		6	0,03590	7,28502	42,27149	4,35069	8,12851	
		8	0,01347	9,00397	61,87149	6,85044	27,72851	
5. Wurzel	30,38952	0	—8,90424	—	—	—	—	(V)
		2	1,00000	5,86426	33,18952	5,13707i	—27,58952	
		4	—0,59521	6,81099	41,58952	3,79335i	—19,18952	
		6	—1,39192	8,14998	55,58952	2,36864	—5,18952	
		8	—0,13703	9,71543	75,18952	5,79745	14,41049	

* i bedeutet die imaginäre Einheit.

2. *Die zweite Familie.* Weiter wollen wir uns mit dem Falle beschäftigen, in dem die Schwingungsfläche symmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien, antisymmetrisch dagegen in bezug auf die beiden Diagonalen ist. Eine solche Schwingungsfläche hat mindestens die zwei Diagonalen als Knotenlinien, und es gilt offenbar

$$w'(x, y) = -w'(y, x), \quad b_n(= b_m) = -a_n .$$

Somit ergibt sich aus (11)

$$\overline{w}' = \alpha_0[u_0(\xi) - u_0(\eta)] + \sum_n (-1)^{n/2} \alpha_n [u_n(\xi) \cos n\pi\eta_j - u_n(\eta_j) \cos n\pi\xi] \quad (n = 2, 4, 6 \ldots). \quad (15)$$

Der Ausdruck für K_n, ist derselbe wie in (12) mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Wurzeln μ, die aus der Lösung der durch obige Änderung hergestellten Frequenzgleichung gefunden werden, sind natürlich verschieden von denen für die erste Schwingungsfamilie. Die Rechenergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt, während die entsprechenden Knotenfiguren durch Abb. 5 und die Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 6{,}62316$ bzw. $\mu = 16{,}36387$ in Abb. 6 bzw. 7 gezeigt werden.

c) Die Näherungsformeln für die quadratische Platte. Wenn man in (11) und (15) alle Glieder der unendlichen Reihen vernachlässigt, so erhält man lediglich

$$w' = a_0[u_0(\xi) \pm u_0(\eta)]. \quad (16)$$

Dies ist die *Rayleigh*sche Näherungsformel[1] für die erste (+ Zeichen) und die zweite Familie (— Zeichen) der ersten Schwingungsart der quadratischen Platte und genügt von vornherein den Randbedingungen

$$\left[\frac{\partial^3 w'}{\partial x^3}\right]_{x=\pm\frac{2}{a}} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial^3 w'}{\partial y^3}\right]_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 .$$

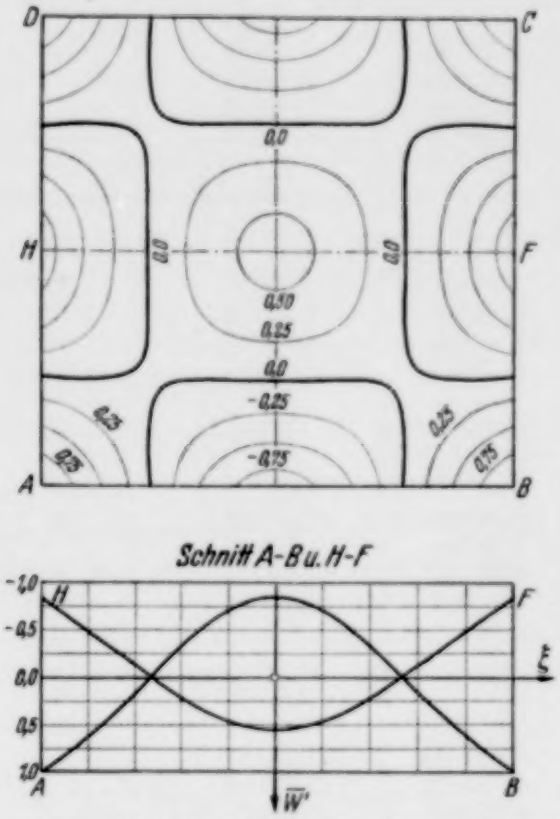


Abb. 3. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 6{,}45284$.

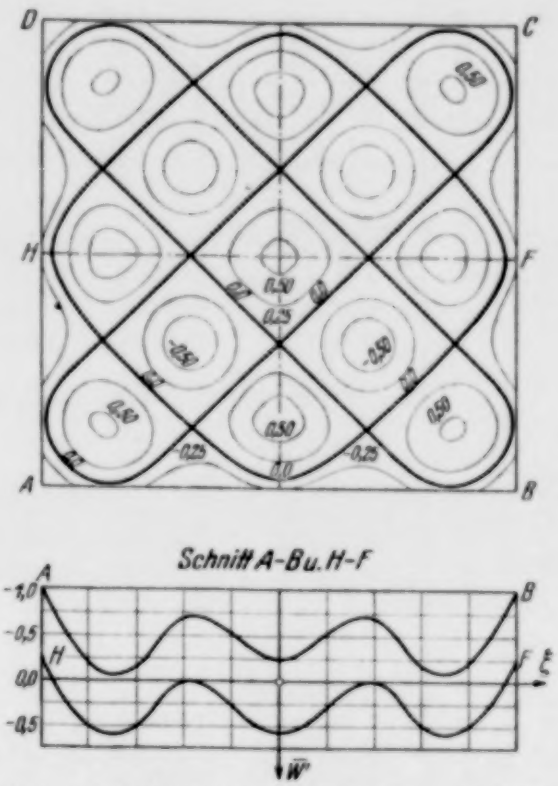


Abb. 4. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 30{,}38952$.

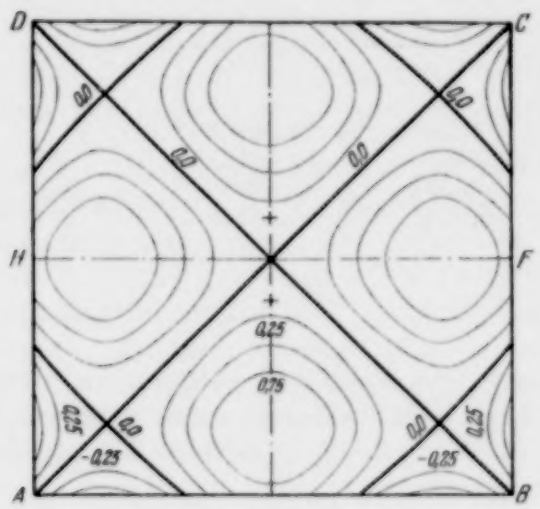


Abb. 6. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 6{,}62316$.

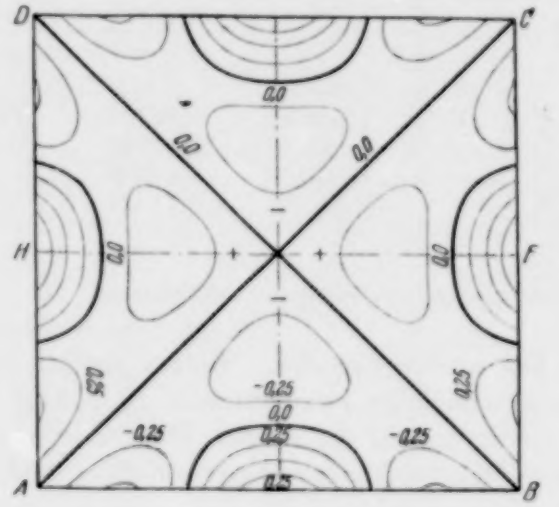


Abb. 7. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 16{,}36387$.

Die Werte von μ werden durch die aus den anderen Randbedingungen

$$\left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right]_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right]_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0$$

[1] *Lord Rayleigh*, Theory of Sound I, S. 372.

Tabelle 2. *Die Werte von μ und der verschiedenen Beiwerte für die zweite Familie der ersten Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.*

μ		n	α_n	λ_n	$\lambda_n^2 - \nu n^2$	λ_n'	$\lambda_n'^2 - \nu n^2$	Abb. 5. Knotenlinien.
1. Wurzel	1,98550	0	—19,46060	—	—	—	—	(I)
		2	1,00000	2,44653	4,78550	1,41933	0,81450	
		4	0,00264	4,24093	13,18550	3,74359	9,21450	
		6	—0,00487	6,16324	27,18550	5,83219	23,21450	
		8	—0,00290	8,12315	46,78550	7,87493	42,81450	
2. Wurzel	6,62316	0	3,93698	—	—	—	—	(II)
		2	1,00000	3,25932	9,42316	1,61962i	—3,82316	
		4	—0,09935	4,75638	17,82316	3,06216	4,57684	
		6	—0,01507	6,52864	31,82316	5,42004	18,57684	
		8	—0,00451	8,40376	51,42316	7,57475	38,17684	
3. Wurzel	11,86565	0	3,84826	—	—	—	—	(III)
		2	1,00000	3,98317	14,66565	2,80458i	—9,06565	
		4	—0,48091	5,27879	23,06565	2,03331	—0,66565	
		6	—0,02845	6,91850	37,06565	4,91267	13,33435	
		8	—0,00453	8,71009	56,66565	7,22041	32,93435	
4. Wurzel	16,36387	0	—0,02833	—	—	—	—	(IV
		2	1,00000	4,51264	19,16387	3,51623i	—13,56387	
		4	—0,24428	5,68893	27,56387	0,60322i	—5,16387	
		6	—0,01363	7,23629	41,56387	4,43127	8,83613	
		8	—0,00297	8,96459	61,16387	6,90189	28,43613	
5. Wurzel	29,75996	0	5,79354	—	—	—	—	(V)
		2	1,00000	5,81033	32,55996	5,07543i	—26,95996	
		4	0,66331	6,76461	40,95996	3,70944i	—18,55996	
		6	—0,61699	8,10925	54,95996	2,49801	—4,55996	
		8	—0,05732	9,68297	74,55996	5,85150	15,04004	

hervorgehenden Gleichung

$$\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0 \tag{17}$$

bestimmt. Dies ist nichts anderes als die Frequenzgleichung für die symmetrischen Schwingungen des geraden Stabes mit freien Enden. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichung (17) auch aus (*) auf Seite 307 mit $n = s = 0$, $\nu = 0$, nämlich aus $\lim_{n \to 0} H_n = 0$ hervorgeht.

Die Auflösung von (17) nach μ liefert

1. Wurzel	2. Wurzel	3. Wurzel	4. Wurzel
μ=2,26689	12,25007	30,25000	56,25000

Diese Werte von μ gelten sowohl für die erste als auch für die zweite Familie der ersten Schwingungsart, weil die Gleichung (16) unabhängig von dem Vorzeichen von $u_0(\eta)$ eine und dieselbe Frequenzgleichung (17) liefert. Theoretisch ist es aber nicht der Fall (siehe S. 309).

Man erkennt, daß die oben angeschriebene erste, zweite bzw. dritte Wurzel der in Tabelle 1 und 2 stehenden ersten, dritten bzw. fünften Wurzel mit nur geringem Fehler entspricht. Ferner sieht man, daß die den aus der theoretischen Formel (13) hervorgehenden zweiten, vierten usw. Wurzeln entsprechenden Wurzeln nicht von der Näherungsformel (17) geliefert werden.

4. Die zweite Schwingungsart. a) Die allgemeinen Formeln. Es handelt sich zweitens um den Fall, in dem die Schwingungsfläche der Platte antisymmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien $\xi = 0$ und $\eta = 0$ des Rechtecks ist. Eine derartige Schwingungsfläche hat mindestens zwei Knotenlinien $\xi = 0$ und $\eta = 0$ und wird durch

$$w' = \sum_n a'_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} v_{\alpha n}(\xi) \sin n\pi\eta + \sum_m b'_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} v_{\beta m}(\eta) \sin m\pi\xi \quad (m, n, = 1, 3, 5 \ldots) \tag{18}$$

ausgedrückt.

Aus den Randbedingungen (a) folgt

$$\sum_n a'_n \left[\frac{a^2}{\pi^2} v''_{\alpha n}\left(\frac{a}{2}\right) - \nu\,\alpha^2 n^2 v_{\alpha n}\left(\frac{a}{2}\right)\right](-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi\eta - \sum_m b'_m \left[m^2 v_{\beta m}(\eta) - \frac{\nu a^2}{\pi^2} v''_{\beta m}(\eta)\right] = 0. \quad (*)$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{a^2}{\pi^2} v''_{\alpha n}\left(\frac{a}{2}\right) - \nu\,\alpha^2 n^2 v_{\alpha n}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{(\lambda^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2 n^2)^2}{\lambda_{\alpha n}} \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n} - \frac{(\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2 n^2)^2}{\lambda'_{\alpha n}} \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}$$

und vermöge der Formel

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_{\beta m}\eta}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m}} = \frac{4\lambda_{\beta m}}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 + \lambda^2_{\beta m}} \sin n\pi\eta, \qquad \left(-\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2}\right). \quad (n = 1, 3, 5 \ldots) \tag{19}$$

ergibt sich aus (*)

$$\left.\begin{aligned} &a'_n G_{\alpha n} - \frac{8\mu'}{\pi} \sum_r b'_r \frac{(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\,\alpha^2 \mu'^2}{(n^2 + \beta^2 r^2)^2 - \mu'^2} = 0 \quad (r = 1, 3, 5 \ldots) \\ \text{mit} \quad &G_{\alpha n} \equiv \frac{1}{\lambda_{\alpha n}} (\lambda^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2 n^2)^2 \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\alpha n} - \frac{1}{\lambda'_{\alpha n}} (\lambda'^2_{\alpha n} - \nu\,\alpha^2 n^2)^2 \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\alpha n}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Analog folgt aus den Randbedingungen (b)

$$\left.\begin{aligned} &b'_m G_{\beta m} - \frac{8\mu}{\pi} \sum_s a'_s \frac{(1-\nu)^2 m^2 s^2 + \nu\,\beta^2 \mu^2}{(m^2 + \alpha^2 s^2)^2 - \mu^2} = 0 \qquad (s = 1, 3, 5 \ldots) \\ \text{mit} \quad &G_{\beta m} \equiv \frac{1}{\lambda_{\beta m}} (\lambda^2_{\beta m} - \nu\,\beta^2 m^2)^2 \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda_{\beta m} - \frac{1}{\lambda'_{\beta m}} (\lambda'^2_{\beta m} - \nu\,\beta^2 m^2)^2 \mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_{\beta m}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Wenn man ferner aus (20) die unbekannten Beiwerte b'_r eliminiert, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &a'_n + \sum_s K_{ns} a'_s = 0 \qquad (n, s = 1, 3, 5 \ldots) \\ \text{mit} \quad &K_{ns} = -\frac{64\,\mu\mu'}{\pi^2 G_{\alpha n}} \sum_r \frac{[(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\,\alpha^2 \mu'^2]\,[(1-\nu)^2 r^2 s^2 + \nu\,\beta^2 \mu^2]}{G_{\beta r}[(n^2 + \beta^2 r^2)^2 - \mu'^2]\,[(r^2 + \alpha^2 s^2)^2 - \mu^2]}. \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

Insbesondere für die quadratische Platte kommt

$$K_{ns} = -\frac{64\,\mu^2}{\pi^2 G_n} \sum_r \frac{[(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\,\mu^2]\,[(1-\nu)^2 r^2 s^2 + \nu\,\mu^2]}{G_r[(n^2 + r^2)^2 - \mu^2]\,[(r^2 + s^2)^2 - \mu^2]}. \tag{22b}$$

Es ist ersichtlich, daß die Frequenzgleichung für diesen Fall auch durch (13), aber mit $n = s = 1, 3, 5 \ldots$ ausgedrückt wird.

b) Die Formeln und die Rechenergebnisse für die quadratische Platte.

1. *Die erste Familie.* Wir betrachten jetzt die erste Familie, in der die Platte antisymmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien, symmetrisch dagegen in bezug auf die beiden Diagonalen des Quadrats schwingt. Eine solche Schwingungsfläche hat mindestens zwei Knotenlinien $\xi = 0$ und $\eta = 0$ und wird wegen $b'_n\,(= b'_m) = a'_n$ durch

$$\left.\begin{aligned} &w' = a'_1 \bar{w}', \\ &w' = \sum_n \alpha'_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} [v_n(\xi) \sin n\pi\eta + v_n(\eta) \sin n\pi\xi], \\ &\alpha'_n = \frac{a'_n}{a'_1}, \qquad (\alpha'_1 = 1) \qquad (n = 1, 3, 5 \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

ausgedrückt.

Mit Rücksicht auf

$$\alpha = \beta = 1, \quad \mu' = \mu, \quad r = s, \quad b'_r = a'_s$$

erhält man aus (20)

$$a'_n G_n - \frac{8\mu}{\pi} \sum_s a'_s \frac{(1-\nu)^2 n^2 s^2 + \nu \mu^2}{(n^2+s^2)^2 - \mu^2} = 0 .$$

Somit vereinfacht sich der Ausdruck für K_{ns}, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} K_{ns} &= -\frac{8\mu}{\pi G_n} \frac{(1-\nu)^2 n^2 s^2 + \nu \mu^2}{(n^2+s^2)^2 - \mu^2} \\ \text{mit} \qquad & \\ G_n &\equiv \frac{(n^2 - \nu n^2 + \mu)^2}{\sqrt{n^2+\mu}} \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2+\mu} - \frac{(n^2 - \nu n^2 - \mu)^2}{\sqrt{n^2-\mu}} \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2-\mu} . \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

In analoger Weise wie in den letzten Fällen erhält man die in Tabelle 3 zusammengestellten Rechenergebnisse und die durch Abb. 8 dargestellten Knotenlinien. Abb. 9 bzw. 10 zeigt die Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 7{,}86148$ bzw. $\mu = 15{,}83029$.

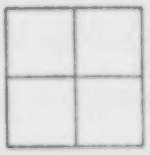
Die in Tabelle 3 angeschriebene erste Wurzel $\mu = 1{,}36508$ ist der allerniedrigste Eigenwert für alle Schwingungsarten der quadratischen Platte, also gehört sie dem Grundton an, in welchem die Platte mit nur zwei Knotenlinien $\xi = 0$ und $\eta = 0$ schwingt, wie Abb. 8 (I) zeigt.

Tabelle 3. *Die Werte von μ und der verschiedenen Beiwerte für die erste Familie der zweiten Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.*

μ		n	α_n	λ_n	$\lambda_n^2 - \nu n^2$	λ'_n	$\lambda_n'^2 - \nu n^2$
1. Wurzel	1,36508	1	1,00000	1,53788	2,06508	0,60422i	—0,66508
		3	0,00766	3,21949	7,66508	2,76314	4,93492
		5	0,00100	5,13469	18,86508	4,86158	16,13492
		7	0,00041	7,09684	35,66508	6,90181	32,93492
2. Wurzel	7,86148	1	1,00000	2,97685	8,56163	2,61947i	—7,16163
		3	0,23339	4,10632	14,16163	1,06694	—1,56163
		5	0,00888	5,73251	25,36163	4,13985	9,63837
		7	0,00178	7,54066	42,16163	6,41392	26,43837
3. Wurzel	15,83029	1	1,00000	4,10247	16,53029	3,85101i	—15,13029
		3	—4,56065	4,98299	22,13029	2,61348i	—9,53029
		5	—0,05491	6,38986	33,33029	3,02815	1,66971
		7	—0,01457	8,05176	50,13029	5,75931	18,46971
4. Wurzel	21,70213	1	1,00000	4,76468	22,40213	4,54996i	—21,00213
		3	—0,07613	5,54095	28,00213	3,56400i	—15,40213
		5	0,17938	6,83389	39,20213	1,81600	—4,20213
		7	0,01181	8,40846	56,00213	5,22474	12,59787
5. Wurzel	30,55567	1	1,00000	5,61744	31,25567	5,43651i	—29,85567
		3	—6,10581	6,28933	36,85567	4,64281i	—24,25567
		5	—2,80175	7,45357	48,05567	2,35705i	—13,05567
		7	—0,12231	8,91940	64,85567	4,29469	3,74433

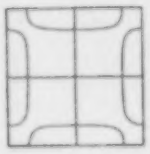
Abb. 8. Knotenlinien.

(I)



(II)

(III)



(IV)

(V)

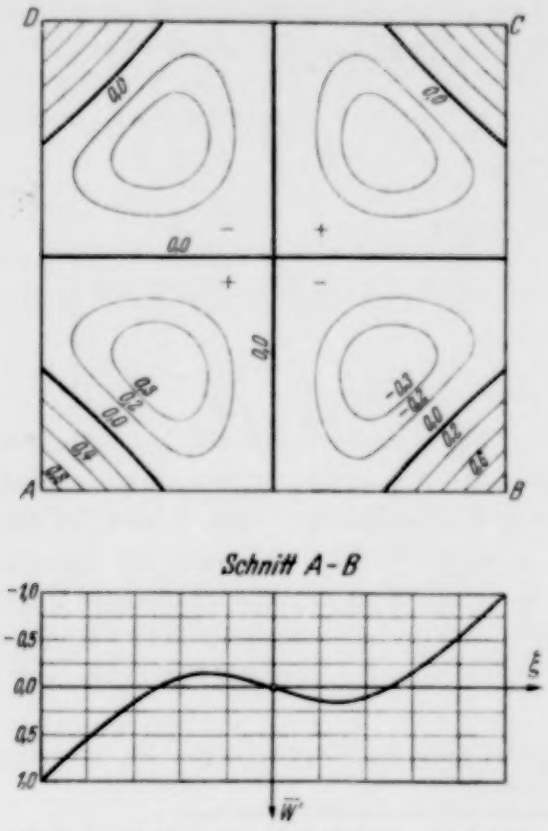


Abb. 9. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 7{,}86148$.

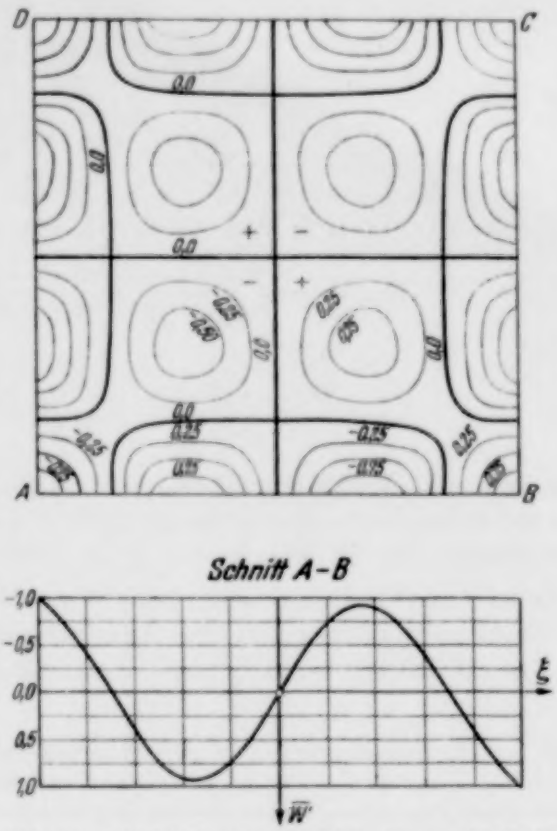


Abb. 10. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 15{,}83029$.

2. *Die zweite Familie.* Wir wollen uns jetzt mit dem Falle beschäftigen, in dem die Schwingungsfläche antisymmetrisch nicht nur in bezug auf die beiden Mittellinien, sondern auch auf die beiden Diagonalen des Quadrats ist. Hierbei hat die Schwingungsfläche mindestens vier

Tabelle 4. *Die Werte von μ und der verschiedenen Beiwerte für die zweite Familie der zweiten Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.*

μ		n	α_n	λ_n	$\lambda_n^2 - \nu n_2$	λ_n'	$\lambda_n'^2 - \nu n^2$	Abb. 11. Knotenlinien.
1. Wurzel	7,04202	1	1,00000	2,83585	7,74202	2,45805i	—6,34202	(I)
		3	—0,12827	4,00525	13,34202	1,39928	—0,74202	
		5	—0,00557	5,66057	24,54202	4,23769	10,45798	
		7	—0,00101	7,48612	41,34202	6,47750	27,25798	
2. Wurzel	17,59902	1	1,00000	4,31266	18,29902	4,07419i	—16,89902	(II)
		3	2,68336	5,15742	23,89902	2,93241i	—11,29902	
		5	—0,13566	6,52679	35,09902	2,72047	—0,09902	
		7	—0,02103	8,16082	51,89902	5,60366	16,70098	
3. Wurzel	20,73565	1	1,00000	4,66215	21,43565	4,44248i	—20,03565	(III)
		3	0,15411	5,45304	27,03565	3,42573i	—14,43565	
		5	—0,13841	6,76282	38,23565	2,06503	—3,23565	
		7	—0,01080	8,35079	55,03565	5,31642	13,56435	
4. Wurzel	29,88212	1	1,00000	5,55717	30,58212	5,37421i	—29,18212	(IV)
		3	1275,527	6,23555	36,18212	4,56970i	—23,58212	
		5	—346,402	7,40825	47,38212	2,20955i	—12,38212	
		7	—20,133	8,88156	64,18212	4,37240	4,41788	

Knotenlinien $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi = \eta$, $\xi = -\eta$, und der Ausdruck für $\overline{w}'$ wird nur durch Umkehrung des Vorzeichens für $v_n(\eta)$ in (23) ermittelt. Also kommt

$$\overline{w}' = \sum \alpha_n'(-1)^{\frac{n-1}{2}} [v_n(\xi) \sin n\pi\eta - v_n(\eta) \sin n\pi\xi] \quad (n = 1, 3, 5 \ldots). \tag{25}$$

Analog ist der Ausdruck für K_n, derselbe wie der in (24) mit entgegengesetztem Vorzeichen.

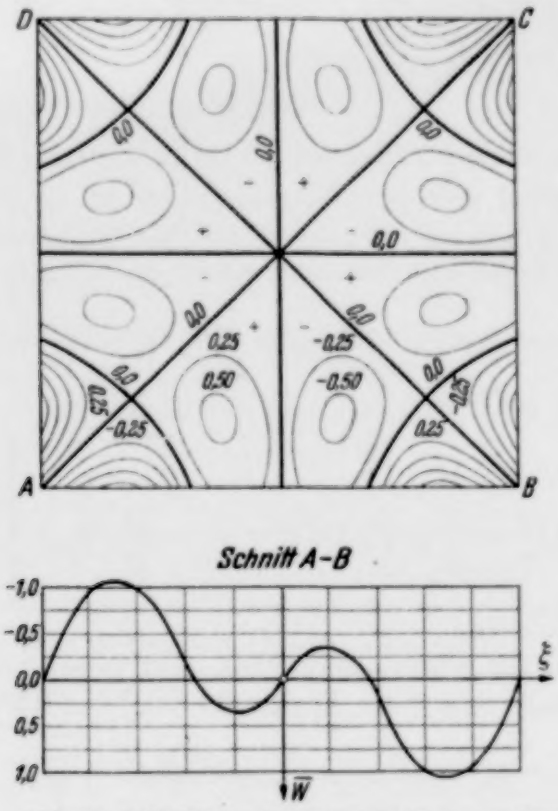


Abb. 12. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 20{,}73565$.

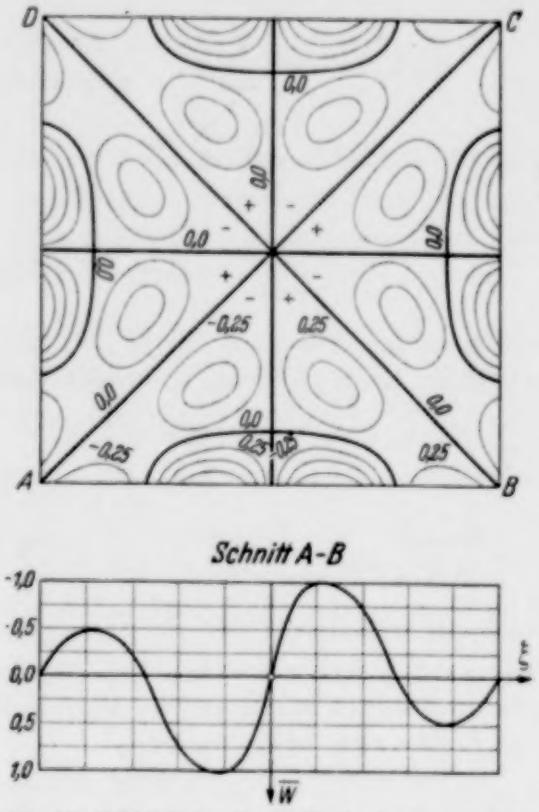


Abb. 13. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 29{,}88212$.

Der allgemeine Ausdruck für K_n, (22b) ist verschieden von dem des K_n, (24) für die erste Familie sowie des $-K_n$, (24) für die zweite Familie. Aber man kann beweisen, daß die durch K_n, (22b) gebildete Frequenzgleichung gleichzeitig die Wurzeln für die beiden Familien deswegen liefert, weil diese Frequenzgleichung mit der aus dem Produkt der einzelnen Frequenzgleichungen für jede Familie hervorgehenden Gleichung identisch ist.

Die numerischen Rechenergebnisse sind in Tabelle 4 zusammengestellt, während die entsprechenden Kontenfiguren durch Abb. 11 gezeigt werden. Abb. 12 bzw. 13 stellt die Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 20{,}73565$ bzw. $\mu = 29{,}88212$ dar.

5. Die dritte Schwingungsart. a) Die allgemeinen Formeln. Man sieht, daß die Platte in der ersten sowie in der zweiten Schwingungsart so schwingt, daß die Auslenkung einer beliebig durch den Mittelpunkt des Quadrats gezogenen geraden Linie symmetrisch in bezug auf diesen Punkt ist. Wir gehen jetzt dazu über, den anderen Schwingungsfall zu betrachten, in dem eine solche Linie antisymmetrisch in bezug auf ihren Mittelpunkt schwingt.

Wenn nun die Schwingungsfläche symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $\xi = 0$, antisymmetrisch dagegen in bezug auf die andere Mittellinie $\eta = 0$ ist, so hat sie mindestens eine Knotenlinie $\eta = 0$, wie Abb. 14 zeigt, und die beliebig durch den Mittelpunkt des Rechtecks gezogene gerade Linie schwingt antisymmetrisch in bezug auf diesen Punkt. Eine Schwingungsfläche mit dieser Eigenschaft wird durch

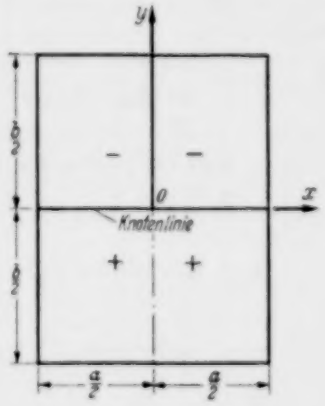


Abb. 14. $\overline{w}'a$-Fläche.

$$\left.\begin{aligned} w_a' = \sum a_n u_{\alpha n}(\xi)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi\eta + b_0' v_0(\eta) + \sum_m b_m' v_{\beta m}(\eta)(-1)^{\frac{m}{2}} \cos m\pi\xi \\ (m = 2, 4, 6 \ldots,\ n = 1, 3, 5 \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

mit

$$v_0(\eta) = \lim_{m \to 0} v_{\beta m}(\eta) = \sqrt{\mu'}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\sqrt{\mu'}\,\eta}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}} + \frac{\sin\pi\sqrt{\mu'}\,\eta}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}}\right)$$

ausgedrückt. In ähnlicher Weise wie in früheren Fällen erhält man aus den Randbedingungen (a) bzw. (b)

$$a_n H_{\alpha n} - \frac{8\mu'}{\pi}\left[b_0' \frac{\nu\alpha^2\mu'^2}{n^4-\mu'^2} + \sum_r b_r' \frac{(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\alpha^2\mu'^2}{(n^2+\beta^2 r^2)^2-\mu'^2}\right] = 0 \qquad (r = 2, 4, 6 \ldots) \tag{27}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} b_m' G_{\beta m} - \frac{8\mu}{\pi}\sum_s a_s \frac{(1-\nu)^2 m^2 s^2 + \nu\beta^2\mu^2}{(m^2+\alpha^2 s^2)^2-\mu^2} = 0 \quad (s = 1, 3, 5, \ldots), \\ b_0' = \frac{4\nu\mu'}{\pi t'}\sum_s a_s \frac{\mu'^2}{s^4-\mu'^2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

mit

$$t' = \lim_{m\to 0} G_{\beta m} = \mu'\sqrt{\mu'}\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu'}\right).$$

Setzt man den Ausdruck für b_0' (28) und den aus der ersten Gleichung (28) hervorgehenden Ausdruck für b_r' in (27) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} a_n + \sum_s K_{ns} a_s = 0 \qquad (n, s = 1, 3, 5 \ldots .) \\ \text{mit} \\ K_{ns} = -\frac{64\mu\mu'}{\pi^2 H_{\alpha n}}\left\{\frac{\nu^2\mu'^4}{2t'(n^4-\mu'^2)(s^4-\mu'^2)} + \sum_r \frac{[(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\alpha^2\mu'^2]\,[(1-\nu)^2 r^2 s^2 + \nu\beta^2\mu^2]}{G_{\beta r}[(n^2+\beta^2 r^2)^2-\mu'^2]\,[(r^2+\alpha^2 s^2)^2-\mu^2]}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Daraus kann man leicht die Frequenzgleichung herstellen.

Wenn es sich ferner um den Fall handelt, in dem die Schwingungsfläche antisymmetrisch bzw. symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $\xi = 0$ bzw. $\eta = 0$ des Rechtecks ist, wie Abb. 15 zeigt, so ergibt sich ohne weiteres[1]

$$\left.\begin{aligned} w_b' = a_0' v_0(\xi) + \sum_n a_n' v_{\alpha n}(\xi)(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\pi\eta + \sum_m b_m u_{\beta m}(\eta)(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin m\pi\xi \\ (m = 1, 3, 5 \ldots,\ n = 2, 4, 6 \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

mit

$$v_0(\xi) = \lim_{n\to 0} v_{\alpha n}(\xi) = \sqrt{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\sqrt{\mu}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} + \frac{\sin\pi\sqrt{\mu}\,\xi}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}}\right)$$

und

$$\left.\begin{aligned} b_m + \sum_r K_{mr} b_r = 0 \qquad (r = 1, 3, 5 \ldots) \\ \text{mit} \\ K_{mr} = -\frac{64\mu\mu'}{\pi^2 H_{\beta m}}\left\{\frac{\nu^2\mu^4}{2t(m^4-\mu^2)(r^4-\mu^2)} + \sum_s \frac{[(1-\nu)^2 m^2 s^2 + \nu\beta^2\mu^2]\,[(1-\nu)^2 r^2 s^2 + \nu\alpha^2\mu'^2]}{G_{\alpha s}[(m^2+\alpha^2 s^2)^2-\mu^2]\,[(s^2+\beta^2 r^2)^2-\mu'^2]}\right\}, \\ t = \lim_{n\to 0} G_{\alpha n} = \mu\sqrt{\mu}\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

---

[1] Mit Rücksicht auf $\lim_{b\to\infty} v_{\alpha n}(\xi) = 0$, $\lim_{b\to\infty} b_m = 0$ ergibt sich $\lim_{b\to\infty} w_b' = a_0' v_0(\xi)$. Dies stellt die Eigenfunktion für die antisymmetrischen Querschwingungen des geraden Stabes mit freien Enden dar, und die Frequenzgleichung hierfür wird ersichtlich durch $\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0$ ausgedrückt. Daraus und aus der Formel (17) für die symmetrischen Schwingungen erhält man

$$\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right)\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right) = 0$$

oder bekanntlich (nach einigen weiteren Rechnungen)

$$\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\mu}\cos\pi\sqrt{\mu} = 1$$

als die allgemeine Frequenzgleichung für den betreffenden Stab.

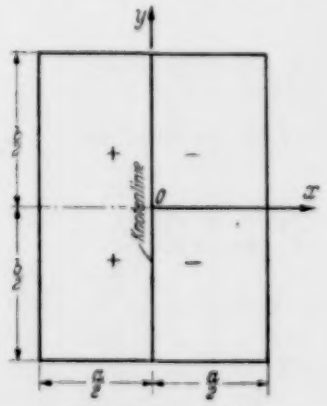


Abb. 15. $\bar{w}'b$-Fläche.

Wenn nun die beiden Funktionen w'_a und w'_b so verbunden werden, daß

$$w = w_a + \varkappa w_b = w'_a \cos \omega_a t + \varkappa w'_b \cos \omega_b t,$$

wo $\varkappa$ eine beliebige reelle Zahl bedeutet, führt w nur dann eine periodische Schwingung aus, wenn das Verhältnis der beiden Teilschwingungsdauern

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{\mu_b}{\mu_a}$$

eine rationale Zahl ist.

b) Die Formeln und die Rechenergebnisse für die quadratische Platte.

1. *Die erste Familie.* Wir wollen jetzt den Fall betrachten, in dem die Platte symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $\xi = 0$, antisymmetrisch in bezug auf die andere $\eta = 0$ des Quadrats schwingt. Die Schwingungsfläche hierfür folgt sofort aus (26):

$$\left.\begin{aligned} &w'_a = a_1 \overline{w}'_a, \\ &\overline{w}'_a = \sum_n \alpha_n u_n(\xi) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\pi\eta + \beta'_0 v_0(\eta) + \sum_m \beta'_m v_m(\eta) (-1)^{\frac{m}{2}} \cos m\pi\xi \\ &\qquad\qquad (m = 2, 4, 6 \ldots,\ n = 1, 3, 5 \ldots) \\ &\alpha_n = \frac{a_n}{a_1}, \quad (\alpha_1 = 1), \quad \beta'_0 = \frac{b'_0}{a_1}, \quad \beta'_m = \frac{b'_m}{a_1}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Analog ergibt sich für die antisymmetrisch bzw. symmetrisch in bezug auf $\xi = 0$ bzw. $\eta = 0$ schwingende Fläche aus (30)

$$\left.\begin{aligned} &w'_b = b_1 \overline{w}'_b. \\ &\overline{w}'_b = \alpha'_0 v_0(\xi) + \sum_n \alpha'_n v_n(\xi) (-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\pi\eta + \sum_m \beta_m u_m(\eta) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin m\pi\xi \\ &\qquad\qquad (m = 1, 3, 5 \ldots,\quad n = 2, 4, 6 \ldots), \\ &\alpha'_0 = \frac{a'_0}{b_1}, \quad \alpha'_n = \frac{a'_n}{b_1}, \quad \beta_m = \frac{b_m}{b_1} \qquad (\beta_1 = 1). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Da die eine von den Flächen $\overline{w}'_a$ und $\overline{w}'_b$ durch Drehung von 90° um ihren Mittelpunkt mit der anderen identisch wird, so ist es leicht verständlich, daß die Größen von μ für $\overline{w}'_b$ gleich

Tabelle 5. *Die Werte von μ und der verschiedenen Beiwerte für die dritte Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.*

μ		n	α_n	λ_n	$\lambda_n^2 - \nu n^2$	λ'_n	$\lambda_n'^2 - \nu n^2$	m	β'_m	λ_m	$\lambda_m^2 - \nu m^2$	λ'_m	$\lambda_m'^2 - \nu m^2$
1. Wurzel	3,52609	1	—1,00000	2,12746	4,22609	1,58937i	—2,82609	0	—0,18568	—	—	—	—
		3	0,01182	3,53922	9,82609	2,33964	2,77391	2	0,29218	2,74337	6,32609	0,68841	—0,72609
		5	0,00430	5,34098	21,02609	4,63399	13,97391	4	0,01218	4,41884	14,72609	3,53184	7,67391
		7	0,00183	7,24749	37,82609	6,74343	30,77391	6	0,00321	6,28698	28,72609	5,69859	21,67391
								8	0,00133	8,21743	48,32609	7,77650	41,27391
2. Wurzel	6,19004	1	1,00000	2,68145	6,89017	2,27819i	—5,49017	0	—7,62932	—	—	—	—
		3	—0,86028	3,89746	12,49017	1,67626	0,10983	2	—0,56588	3,19221	8,99017	1,47992 i	—3,39017
		5	—0,04348	5,58482	23,69017	4,33703	11,30983	4	—0,01392	4,71065	17,39017	3,13207	5,00983
		7	—0,00974	7,42901	40,49017	6,54292	28,10983	6	—0,01076	6,49540	31,39017	5,45984	19,00983
								8	—0,00595	8,37796	50,99017	7,60328	38,60983
3. Wurzel	10,68568	1	1,00000	3,41843	11,38568	3,11218i	—9,98568	0	0,14106	—	—	—	—
		3	—1,43311	4,43685	16,98568	1,29834i	—4,38568	2	—3,03882	3,83219	13,48568	2,58567i	—7,88568
		5	—0,07788	5,97375	28,18568	3,78343	6,81432	4	—0,01973	5,16582	21,88568	2,30528	0,51432
		7	—0,02391	7,72565	44,98568	6,18986	23,61432	6	—0,02166	6,83269	35,88568	5,03133	14,51432
								8	—0,01136	8,64209	55,48568	7,30167	34,21432
4. Wurzel	13,32067	1	1,00000	3,78427	14,02067	3,51008i	—12,62067	0	—0,07630	—	—	—	—
		3	0,09333	3,72448	19,62067	2,07863i	—7,02067	2	—0,07815	4,16181	16,12067	3,05298i	—10,52067
		5	0,00250	6,19037	30,82067	3,41750	4,17933	4	0,17972	5,41486	24,52067	1,63687i	—2,12067
		7	0,00245	7,89434	47,62067	5,97322	20,97933	6	0,01323	7,02287	38,52067	4,76227	11,87933
								8	0,00382	8,79322	58,12067	7,11894	31,47933

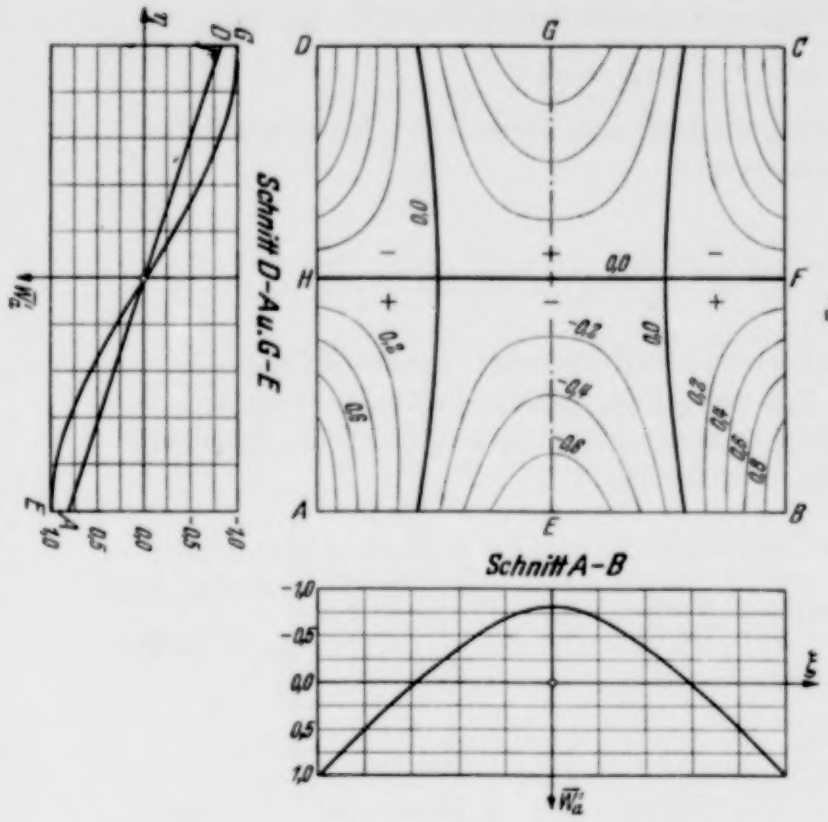


Abb. 16. Schichtlinien der $\overline{w}'_a$-Fläche für $\mu = 3{,}56209$. $(\varkappa = 0)$

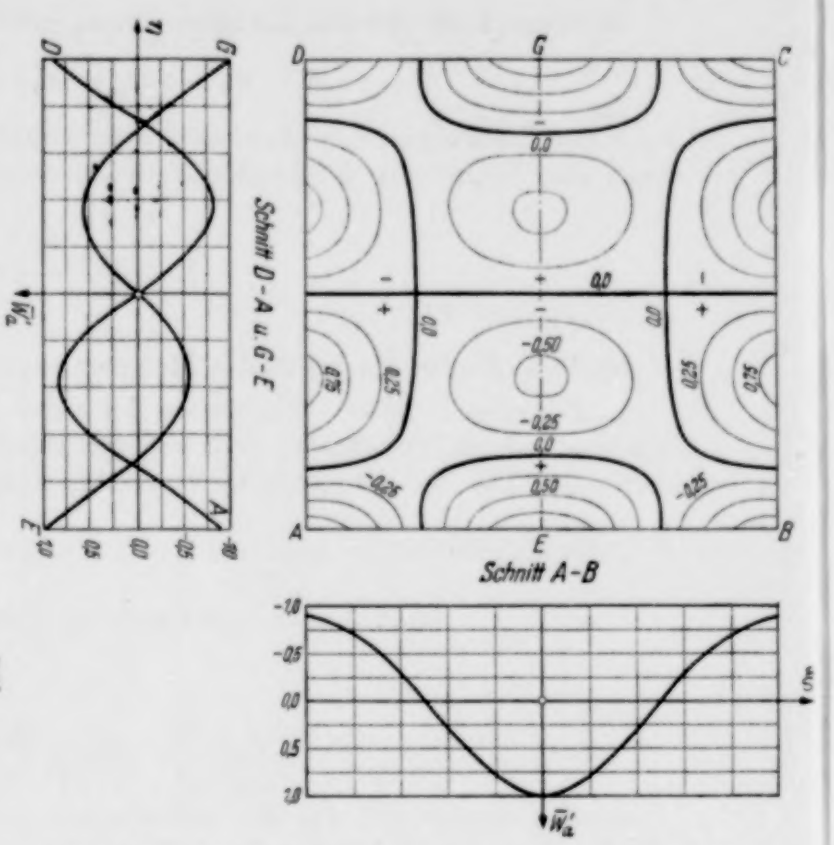


Abb. 17. Schichtlinien der $\overline{w}'_a$-Fläche für $\mu = 10{,}68568$. $(\varkappa = 0)$

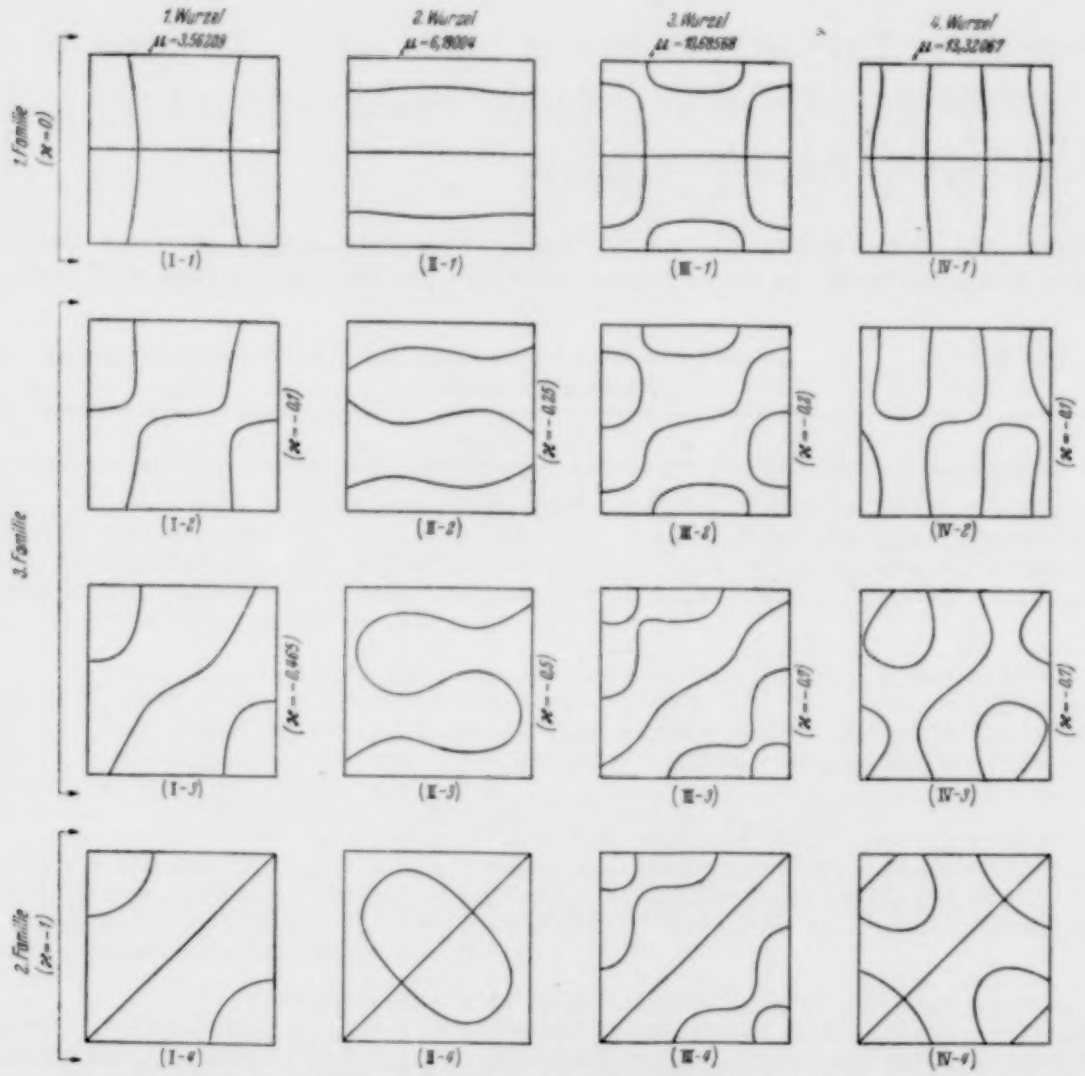


Abb. 18. Schematische Darstellung der Knotenlinien für die dritte Schwingungsart der quadratischen Platte mit $\nu = 0{,}3$.

den entsprechenden Größen von μ für $\overline{w}'_a$ sind. Die Werte von μ für die beiden Schwingungsflächen können daher durch Auflösung der aus der ersten Gleichung (29) mit

$$K_{n\,s} = -\frac{64\,\mu^2}{\pi^2 H_n}\left\{\frac{\nu^2\mu^4}{2\,t\,(n^4-\mu^2)\,(s^4-\mu^2)} + \sum_r \frac{[(1-\nu)^2 r^2 n^2 + \nu\,\mu^2]\,[(1-\nu)^2 r^2 s^2 + \nu\,\mu^2]}{G_r\,[(n^2+r^2)^2-\mu^2]\,[(r^2+s^2)^2-\mu^2]}\right| \qquad (34)$$

$$(n, s = 1, 3, 5 \ldots,\ r = 2, 4, 6 \ldots)$$

hervorgehenden Frequenzgleichung ermittelt werden. In (34) ist der Ausdruck für H_n derselbe wie in (12), während der für G_r durch Einführung von r ($= 2, 4, 6 \ldots$) an Stelle von n in G_n (24) ermittelt wird.

Die wirkliche Rechnung liefert die in Tabelle 5 zusammengestellten Ergebnisse. Abb. 16 bzw. 17 zeigt die der ersten bzw. dritten Wurzel entsprechenden Schichtlinien der $\overline{w}'_a$-Fläche, und die schematisch gezeichneten Knotenfiguren für die ersten vier Wurzeln in Abb. 18 mit den Zeichen (I—1), (II—1) (III—1), (IV—1) dargestellt.

2. *Die zweite Familie.* Hier handelt es sich um die Schwingungsfläche, die antisymmetrisch in bezug auf eine Diagonale des Quadrats ist. Sie hat mindestens eine Diagonale als ihre Knotenlinie und ergibt sich aus (32) und (33) zu

$$\overline{w}' = \overline{w}'_a \pm \overline{w}'_b. \qquad (35)$$

Wie schon erwähnt, hat jede Teilschwingung $\overline{w}'_a$ und $\overline{w}'_b$, und folglich auch die resultierende Schwingung $\overline{w}'$ eine und dieselbe Schwingungsdauer, also die gleiche Tonhöhe. Die Fläche $\overline{w}'_a + \overline{w}'_b$ und $\overline{w}'_a - \overline{w}'_b$ hat je eine verschiedene Diagonale als Knotenlinie. Die in Abb. 18 mit den Zeichen (I—4), (II—4), (III—4), (IV—4) gezeigten Figuren stellen die den ersten bis vierten Wurzeln μ entsprechenden Knotenlinien der Fläche $\overline{w}' = \overline{w}'_a - \overline{w}'_b$ für die quadratische Platte dar, während sie der ersten bzw. dritten Wurzel entsprechenden Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche durch Abb. 19 bzw. 20 dargestellt werden.

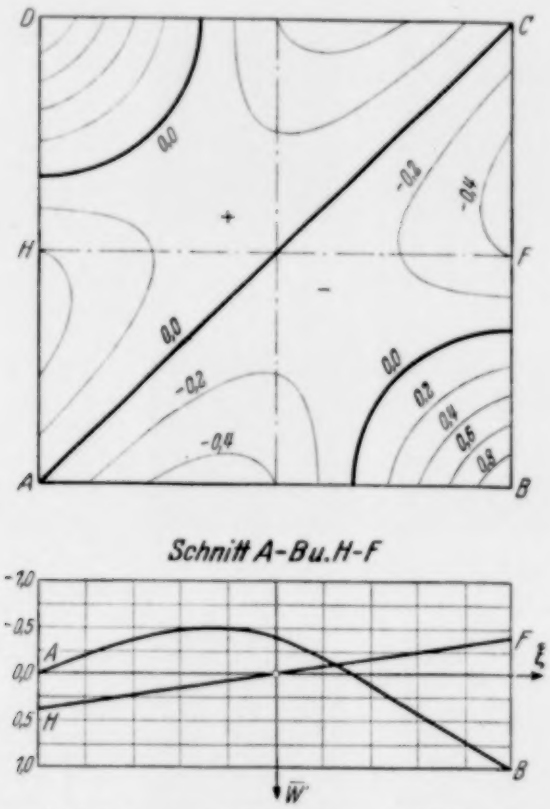


Abb. 19. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 3{,}56209$. ($\varkappa = -1$)

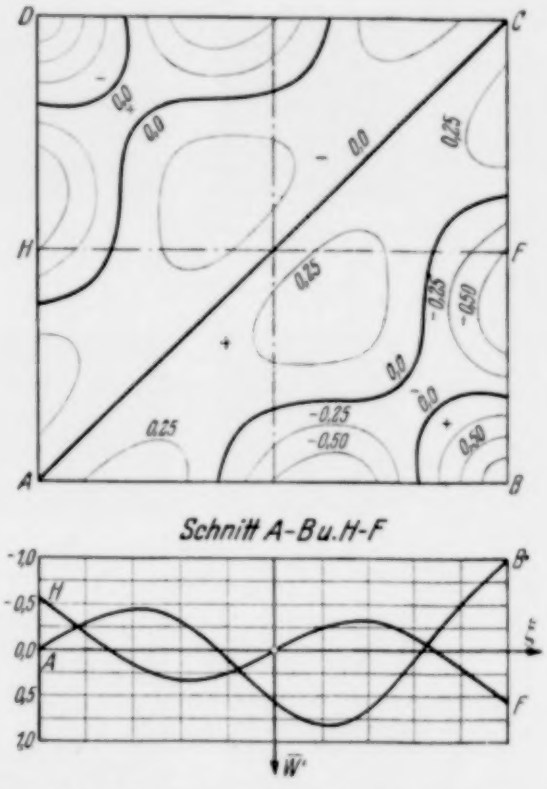


Abb. 20. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 10{,}68568$. ($\varkappa = -1$)

3. *Die dritte Familie.* Wegen der Gleichheit der Schwingungsdauer von $\overline{w}'_a$ und $\overline{w}'_b$ kann man die beiden Flächen allgemein so verbinden, daß

$$\overline{w}' = A\,\overline{w}'_a + B\,\overline{w}'_b \quad \text{oder} \quad \overline{w}' = \overline{w}'_a + \varkappa\,\overline{w}'_b \qquad (36)$$

wird. Hierin kann $\varkappa$ eine beliebige reelle Zahl sein, und die erste bzw. zweite Familie dieser Schwingungsart ist nichts anderes als $\overline{w}'$ (36) mit dem Sonderwert $\varkappa = 0$ bzw. $\varkappa = \pm 1$.

Die jeder Wurzel μ sowie den verschiedenen Größen von $\varkappa$ entsprechenden Knotenfiguren für die dritte Familie ($0 < |\varkappa| < 1$) werden in Abb. 18 dargestellt. Die Schichtlinien der $\overline{w}'$-

Fläche für die erste Wurzel mit $\varkappa = -0{,}1$, für die zweite mit $\varkappa = -0{,}5$, für die dritte mit $\varkappa = -0{,}2$ bzw. für die vierte mit $\varkappa = -0{,}7$ werden durch Abb. 21, 22, 23 bzw. 24 dargestellt.

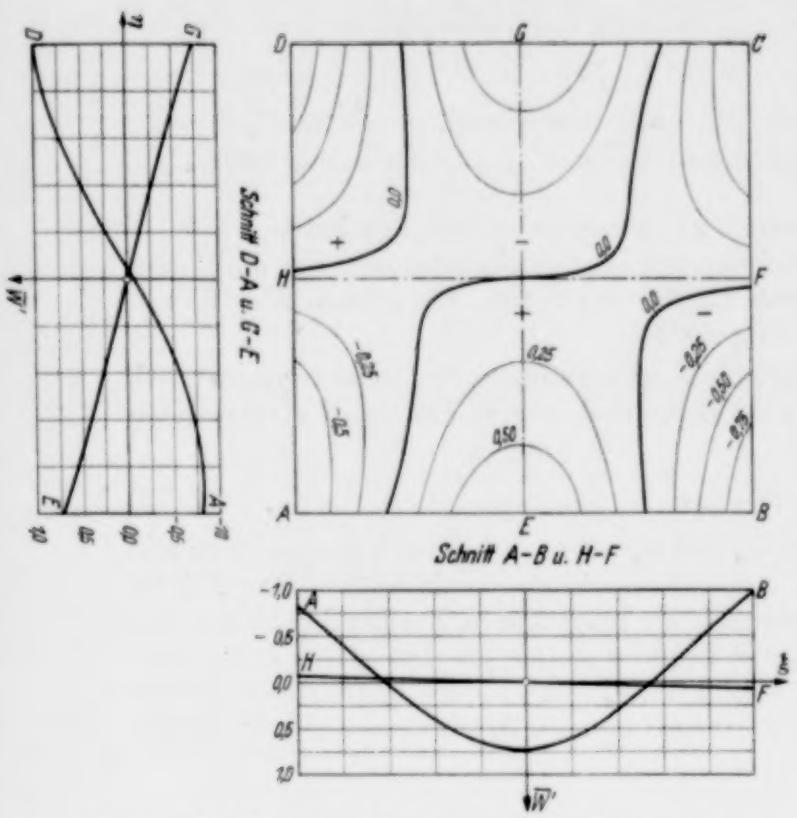


Abb. 21. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 3{,}52609$. ($\varkappa = -0{,}1$)

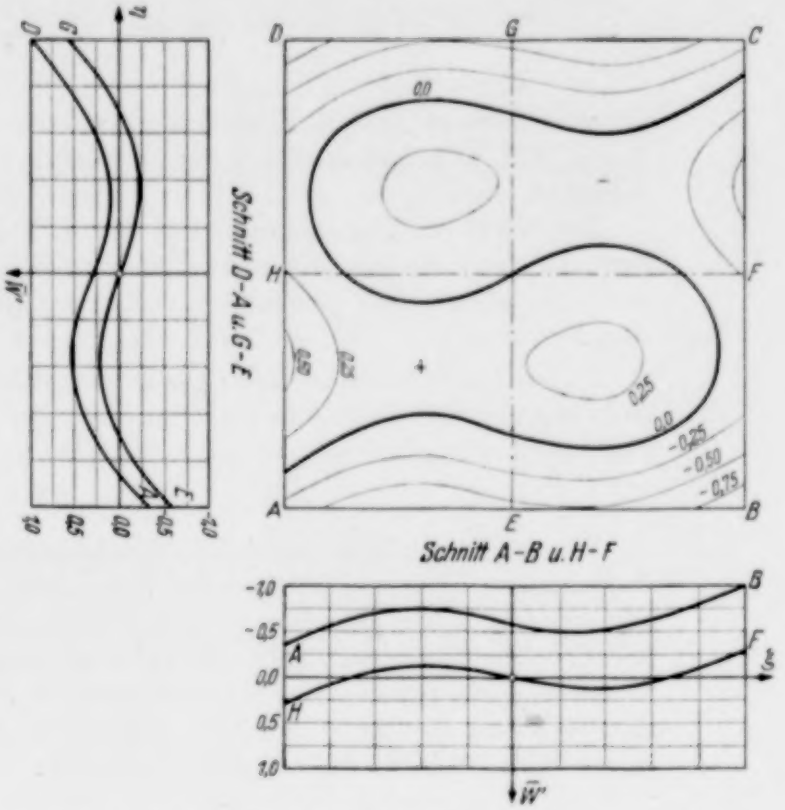


Abb. 22. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 6{,}19004$. ($\varkappa = -0{,}5$)

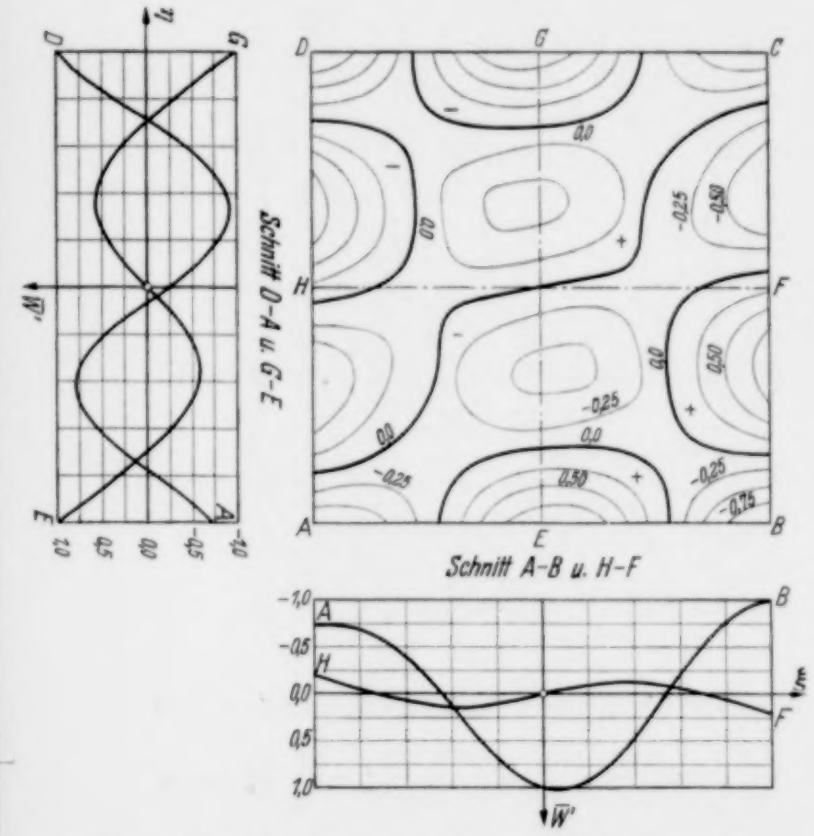


Abb. 23. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 10{,}68568$. ($\varkappa = -0{,}2$)

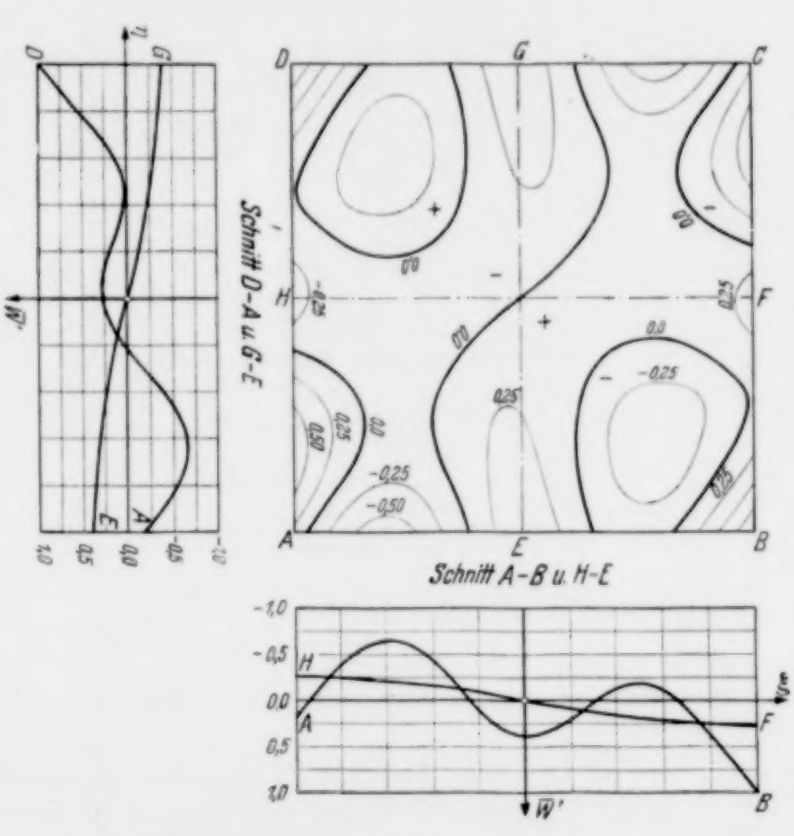


Abb. 24. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für $\mu = 13{,}32067$. ($\varkappa = -0{,}7$)

Es ist merkwürdig, daß die zu jeder Wurzel μ gehörende Figur für die erste Familie mit wachsendem $|\varkappa|$ nach kontinuierlichem Verlauf der zu der dritten Familie gehörenden Figur in die Figur der zweiten Familie verwandelt. Ferner ist es bemerkenswert, daß der Koeffizient $\varkappa$

so gewählt werden kann, daß die Auslenkung eines beliebig gegebenen Punktes (x_1, y_1) einem beliebig gegebenen Festwert γ gleich wird, nämlich

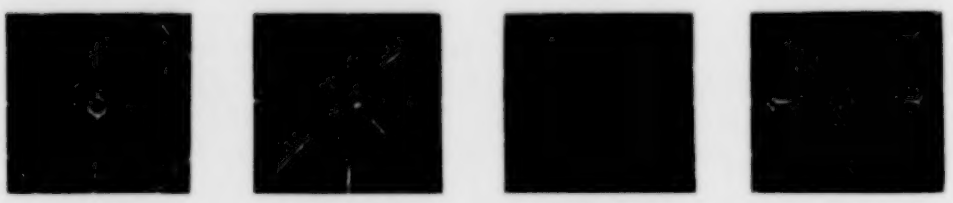
$$\overline{w}'_a(x_1, y_1) + \varkappa\, \overline{w}'_b(x_1, y_1) = \gamma \quad \text{oder} \quad \varkappa = \frac{\gamma - \overline{w}'_a(x_1, y_1)}{\overline{w}'_b(x_1, y_1)}.$$

Dies ist aber darauf beschränkt, daß die Größe $\overline{w}'_b(x_1, y_1)$ nicht gleich Null ist, oder in anderen Worten, der Punkt (x_1, y_1) nicht auf den Knotenlinien $\overline{w}'_b(x, y) = 0$ liegt. Insbesondere hat der Nullwert von γ die wichtigste Bedeutung, weil man hierbei die Platte so schwingen lassen kann, daß ihre Knotenlinie einen beliebig im Bereich des Quadrats außer auf den Knotenlinien $\overline{w}'_b(x, y) = 0$ gewählten Punkt passiert, welche Möglichkeit man auch experimentell bestätigen kann.

6. Experimentelle Untersuchung. Die von mir beschriebenen Knotenfiguren kann man größtenteils auch in den Sandfiguren von Chladni erkennen. Indessen habe ich auch versucht diese Sandfiguren durch einfache Anordnungen zu erzeugen, um die aus meinen Formeln hervorgehenden Knotenfiguren mit ihnen zu vergleichen. Dazu werden quadratische Glasplatten von 2 bis 3 mm Dicke, 20 bis 28 cm Seitenlänge benützt, deren Mittelpunkt (oder unter Um-

1. für μ_2. 2. für μ_3. 2. für μ_3. 2. für μ_4.

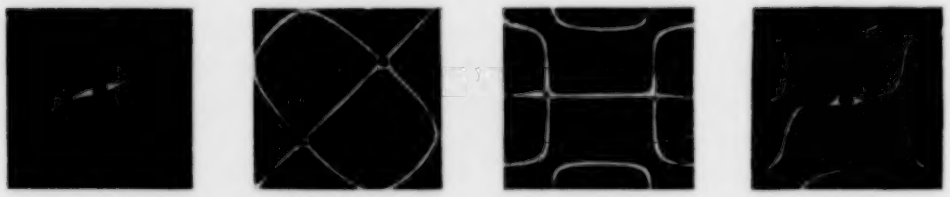
Abb. 25. Sandfiguren für die erste Schwingungsart.



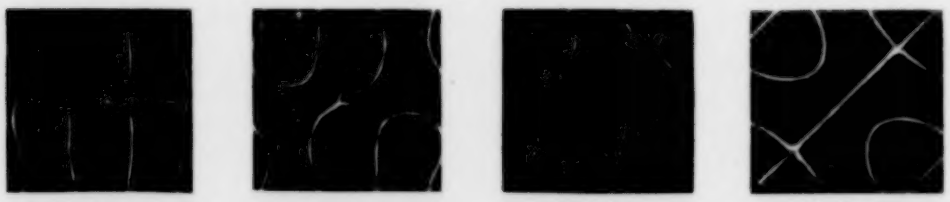
1. für μ_2. 2. für μ_3. 2. für μ_3. 2. für μ_4.

Abb. 26. Sandfiguren für die zweite Schwingungsart.

1. für μ_1. 3. für μ_1. 3. für μ_1. 2. für μ_1.



3. für μ_2. 2. für μ_2. 1. für μ_2. 3. für μ_2.



1. für μ_4. 3. für μ_4. 3. für μ_4. 2. für μ_4.

Abb. 27. Sandfiguren für die dritte Schwingungsart.

ständen andere Punkte) im Schraubstock befestigt werden. Die Erregung der Schwingungen erfolgt wie immer durch Anstreichen mit einem Geigenbogen. Die weiteren Versuchsverfahren sind ganz wie gewöhnlich. Ein Teil der so gebildeten Sandfiguren ist in Abb. 25 bis 27 dargestellt. Die Figur mit der Ziffer 1, 2 bzw. 3 gehört jeweils zu den ersten, zweiten bzw. dritten Familie der entsprechenden Schwingungsart.

Der Vergleich dieser Figuren mit den theoretisch berechneten zeigt, daß einige Figuren miteinander recht gut, die anderen dagegen wenigstens im großen und ganzen übereinstimmen. Es ist klar, daß die etwaige Abweichung hauptsächlich erstens von der Unsicherheit sowie der Undefiniertheit der Befestigung der Glasplatten, zweitens von den verschiedenen störenden Einflüssen des Anstreichens mit dem Geigenbogen, drittens von der Ungenauigkeit der Abmessungen sowie der Unhomogenität der Platte und viertens von der Abweichung des in den Rechnungen angenommenen Wertes von $\nu(=0{,}3)$ von dem wirklichen Wert von ν für die Glasplatte (etwa 0,25) herrührt.

Wie man sieht, gehören die in Abb. 27 mit den Ziffern 3 dargestellten Figuren der dritten Familie der dritten Schwingungsart an. Da sie aber derart erzeugt werden, daß ein aufs Geratewohl gewählter Punkt der Plattenränder unbeweglich bleibt, so ist der Wert von $\varkappa$ ganz unbekannt. Aber man kann den Näherungswert von $\varkappa$ durch Vergleichung mit den in Abb. 18 dargestellten entsprechenden Knotenfiguren mutmaßlich bestimmen. So liegt es zum Beispiel sehr nahe zu sagen, daß $\varkappa$ für die in der ersten Reihe stehende Figur 3 für μ_1 bzw. für die in der untersten Reihe stehende Figur 3 für μ_4 nur wenig von 0,0 bzw. $-1{,}0$ abweicht, während der Wert $\varkappa$ für die in der zweiten Reihe stehende 3 für μ_3 beinahe gleich $-0{,}7$ sein muß.

(Eingegangen am 17. Dezember 1952.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. S. *Iguchi*, Muroran (Japan), Technische Universität.

Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung.

Von W. Szablewski.

1. Einleitung. Die Kenntnis des Einlaufvorganges einer turbulenten Rohrströmung ist für die technische Praxis von erheblichem Belang. Man denke beispielsweise an die Anwendung kurzer Rohrleitungen im Maschinenbau. Während für den laminaren Einlauf die Sachlage als geklärt angesehen werden kann, ist für den turbulenten Strömungszustand nur sehr wenig bekannt. Experimentell liegt hier die Dissertation von *H. Kirsten* [1] aus dem Jahre 1927 vor, die verhältnismäßig kleine *Reynolds*sche Zahlen $\overline{Re} = 10^4$ bis 10^5 betrifft ($\overline{Re} = w\,d/\nu$, wobei w die mittlere Durchflußgeschwindigkeit, d den Rohrdurchmesser, ν die kinematische Zähigkeit bedeuten). *Kirsten* findet für die Geschwindigkeitsverteilung das 1/7 = Potenzgesetz bestätigt und gibt Einauflängen von 50 bis 100 d an. Später hat *J. Nikuradse* [2] im Zusammenhang mit seiner bekannten experimentellen Untersuchung der ausgebildeten Rohrströmung aus orientierenden Messungen das Ergebnis erhalten, daß das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil sich bereits nach einer Einauflänge der Größenordnung 25 bis 40 d einstellt und daß die Änderung derselben mit $\overline{Re}$ anscheinend nur geringfügig ist. Eine theoretische Untersuchung hat im Jahre 1921 *H. Latzko* [3] anläßlich seiner Arbeit über den Wärmeaustausch in Rohren durchgeführt. *Latzko* legte der Rechnung das um ein lineares Glied erweiterte 1/7 = Potenzgesetz der Geschwindigkeit zugrunde. Die von ihm angegebene Formel für die Einauflänge, gemessen vom Eintrittsquerschnitt bis zum Treffpunkt der Grenzschicht mit der Rohrachse, zeigt (im Gegensatz zu *Nikuradse*) eine starke Abhängigkeit von der $\overline{Re}$-Zahl. Für den Bereich der *Kirsten*schen Messung ergibt die Formel anscheinend zu kleine Werte, nämlich Längen von 10 bis 20 d. Eine an und für sich mögliche Auswertung des *Latzko*schen Formalismus hinsichtlich des technisch interessierenden Druckverlustes im Einlauf erfolgte nicht.

Im gegenwärtigen Zeitpunkt erscheint eine neuerliche theoretische Inangriffnahme unseres Problems erfolgversprechend. Der betrachtete Einlaufvorgang stellt eine turbulente Grenzschichtentwicklung mit Druckabfall vom Eintrittsquerschnitt her vor. Bei der theoretischen Untersuchung der turbulenten Strömungen in konvergenten Kanälen [4], die ja den Charakter einer turbulenten Grenzschicht mit Druckabfall haben, hat sich nun ergeben, daß diese eine gute Approximation durch das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz zulassen. Denselben Sachverhalt zeigen die neueren Messungen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann* [5]. Sehr wesentlich ist dabei die Feststellung [6], daß die empirischen Koeffizienten dieses Gesetzes, $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ [vgl. (1)], vom Druckgradienten der Strömung unabhängig sind.

Für unsere Berechnung des Einlaufvorganges entnehmen wir die genannten Koeffizienten den Messungen von *J. Nikuradse* [7] zur ausgebildeten Rohrströmung, die den weiten Bereich $\overline{Re} = 4 \cdot 10^3$ bis $3240 \cdot 10^3$ bedecken. Man hat hier [8] $\varkappa = 0{,}42$, $v_* \delta_0/\nu = 7{,}01$. Damit ist zunächst der erforderliche stetige Anschluß an die ausgebildete Rohrströmung gesichert. Zur sachlichen Begründung der Fortsetzung in den Einlauf hinein ist folgendes zu sagen:

1. Die Koeffizienten $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ sind, wie oben erwähnt, vom Druckgradienten unabhängig und werden deshalb durch die Variation des Druckgradienten im Einlauf nicht berührt. Der Umstand, daß gegenüber der Strömung im ausgebildeten Zustand diese im Einlauf von einer Potentialströmung geführt wird, erweist sich nach den *Nikuradse*schen Messungen der turbulenten Strömung in konvergenten und divergenten Kanälen [9] als belanglos. Dort ergeben sich bei gleicher *Re*-Zahl sowohl für die turbulenten divergenten Strömungen, welche die ganze Kanalbreite ausfüllen, wie für die konvergenten Strömungen, die durch eine Poten-

[1] *L. Schiller und H. Kirsten*, Z. techn. Physik 10 (1929), S. 268.
[2] *J. Nikuradse*, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsheft 356 (1932).
[3] *H. Latzko*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 260.
[4] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 37.
[5] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.
[6] *W. Szablewski*, a. a. O.
[7] *J. Nikuradse*, a. a. O.
[8] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131.
[9] *W. Szablewski*, a. a. O., s. Fußnote 4.

tialströmung in Kanalmitte geführt werden, die gleichen Werte für die Koeffizienten $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes. Bei der von den äußeren Bedingungen unabhängigen Fundierung des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes war das auch nicht anders zu erwarten.

2. Es verbleibt noch der Zähigkeitseinfluß bzw. die Abhängigkeit der Koeffizienten $\varkappa$ $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ von der charakteristischen *Reynolds*schen Zahl. Die Messungen der turbulenten Strömungen in konvergenten Kanälen zeigen, daß als charakteristische *Reynolds*sche Zahl jenes Modells, die den Verlauf von $\varkappa$ und $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ diktiert, nicht die Zahl $Re_\delta = u_1 \delta/\nu$ (u_1 Potentialströmung am Rande der Grenzschicht, δ Grenzschichtdicke) anzusehen ist, sondern die Modellzahl $Re_b = u_1 b/\nu$ (b halbe Kanalbreite). Das ergibt sich daraus, daß dort bei gleicher Re_b-Zahl die Koeffizienten $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ für die Öffnungswinkel $\alpha = 0°, -2°, -4°, -8°$ die gleichen sind, während Re_δ mit den Dicken $\delta/b = 1{,}00\ \ 0{,}46\ \ 0{,}24\ \ 0{,}13$ variiert [1]. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch für die Einlaufvorgänge der konvergenten Kanalströmungen Re_b als charakteristische *Reynolds*sche Zahl anzunehmen. Man kann aus diesem Tatbestand den Schluß ziehen, daß der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung nicht durch die längs des Einlaufs varriierende lokale *Reynolds*sche Zahl Re_δ, sondern durch die Modellzahl $\overline{Re} = \frac{w d}{\nu}$ charakterisiert wird, die für die gesamte Rohrströmung eine Konstante ist.

Wir machen für das Folgende noch die übliche Annahme konstanter Geschwindigkeitsverteilung im Anfangsquerschnitt. Ferner setzen wir turbulenten Strömungszustand der Grenzschicht vom Anfangsquerschnitt her voraus, wie er z. B. durch scharfkantige Ränder erzeugt wird. Die der Rohrachse anliegende Kernströmung behandeln wir als Potentialströmung.

Die Untersuchung erstreckt sich nur auf den „Kernbereich" des Einlaufes, der bis zum Zusammenwachsen der sich von den Wänden her entwickelnden Grenzschichten auf der Rohrachse reicht. Eine Erörterung des sich anschließenden Übergangsbereiches zur voll ausgebildeten Rohrströmung ist mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich. Für technische Anwendungen kann dieser Bereich näherungsweise nach den Daten der ausgebildeten Strömung behandelt werden. Wir kommen darauf noch in Abschn. 3 zurück.

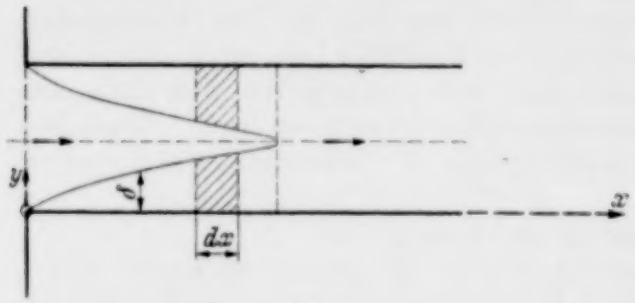


Abb. 1.

2. Berechnung des Einlaufvorganges. Es bedeuten im folgenden x, r Zylinderkoordinaten, r_0 den Rohrhalbmesser, d den Rohrdurchmesser, y den Wandabstand, δ die Grenzschichtdicke, δ_0 die Dicke der laminaren Unterschicht, u die Geschwindigkeitskomponente in der x-Richtung, u_1 die Geschwindigkeit der Potentialströmung, w die mittlere Durchflußgeschwindigkeit, ϱ die Dichte, ν die kinematische Zähigkeit, p den statischen Druck, τ die Schubspannung, τ_0 die Wandschubspannung.

Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz für turbulente Grenzschichten lautet [2]

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \eta + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \left[-1 + \ln \left(4 \varkappa \, Re_\delta \sqrt{c_1} \right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right] \tag{1}$$

mit den Abkürzungen

$$\varphi = \frac{u}{u_1}, \qquad \eta = \frac{y}{\delta}, \qquad Re_\delta = \frac{u_1 \delta}{\nu}$$

und

$$c_1 = \frac{1}{2} c_f' = \frac{\tau_0}{\varrho u_1^2}, \qquad v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}};$$

die Größen $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ stellen die empirischen Koeffizienten dieses Gesetzes dar (vgl. Abschn. 1).

Wir verwenden im folgenden das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz als Approximation für die Geschwindigkeitsverteilung über der gesamten Breite der Grenzschicht im Einlauf. Als Parameter treten in der Verteilungsfunktion (1) die Grenzschichtdicke δ und die Wandschubspannung $c_1 = \tau_0/\varrho u_1^2$ auf. Zu ihrer Bestimmung werden wir die Randbedingung

[1] *W. Szablewski*, a. a. O., s. Fußnote 4 von S. 323.
[2] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 309.

$\varphi = 1$ für $\eta = 1$ und den Impulssatz heranziehen. Es tritt aber hier als weitere Unbestimmte noch die Geschwindigkeit u_1 der Potentialströmung am Rande der Grenzschicht auf. Als weitere Bestimmungsgleichung dient uns hier die Aussage, daß der Massenfluß durch die Querschnittsfläche in der Zeiteinheit konstant ist. Impulssatz und der genannte Kontinuitätssatz sind als Integralsätze der Anwendung einer approximierenden Funktion günstig.

a) Randbedingung $\varphi = 1$ für $\eta = 1$. Die Randbedingung ergibt in Anwendung auf (1)

$$1 = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(4\,\varkappa\, Re_\delta \sqrt{c_1}\right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]. \tag{2}$$

Wir können dann für die Verteilungsfunktion auch schreiben

$$\varphi = 1 + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \eta\,. \tag{3}$$

Im folgenden werden wir die Abkürzung

$$z = \frac{\varkappa}{\sqrt{c_1}} \tag{4}$$

gebrauchen. Aus (2) folgt mit $Re_\delta = \frac{1}{2}\, Re_d \frac{\delta}{r_0}$, wo $Re_d = \frac{u_1 d}{\nu}$,

$$\frac{\delta}{r_0} = \frac{2}{\varkappa\, Re_d}\, z\, e^{z - \left[-1 + \ln(4\,\varkappa) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]}. \tag{5}$$

b) Kontinuitätssatz. Für den Massentransport in der Zeiteinheit erhalten wir

$$\pi\,(r_0 - \delta)^2\, u_1 + \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u\, 2\,\pi\, r\, dr = \pi\, r_0^2\, w\,. \tag{6}$$

Transformation auf

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{1 - \frac{r}{r_0}}{\frac{\delta}{r_0}}$$

ergibt

$$\frac{w}{u_1} = \left(1 - \frac{\delta}{r_0}\right)^2 + 2\,\frac{\delta}{r_0} \int_0^1 \varphi \left(1 - \eta\, \frac{\delta}{r_0}\right) d\eta\,. \tag{7}$$

Setzt man (3) ein, so kommt

$$\frac{w}{u_1} = 1 - \frac{\delta}{r_0}\,\frac{1}{z}\left(2 - \frac{1}{2}\,\frac{\delta}{r_0}\right). \tag{8}$$

Ersetzt man in (5) nunmehr Re_d durch $\overline{Re} = w\, d/\nu = Re_d\, w/u_1$ mit (8), so erhält man bei Auflösung nach δ/r_0

$$\frac{\delta}{r_0} = \left(2 + \frac{C}{e^z}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,z}{(2 + C/e^z)^2}}\right),$$

mit $$C = 2\,\varkappa^2\, \overline{Re}\, e^{\left[-1 + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]}.$$

Beachtet man, daß $\frac{2\,z}{(2 + C/e^z)^2} \ll 1$ ist (der Höchstwert von z entsprechend $\delta/r_0 = 1$ besitzt die Größenordnung 10), so folgt

$$\frac{\delta}{r_0} \approx \frac{z\, e^z}{C + 2\, e^z}\,. \tag{9}$$

Damit haben wir in (8) und (9) zwei Gleichungen gewonnen, die w/u_1 und δ/r_0 als explizite Funktionen von z beschreiben. Den noch fehlenden Zusammenhang zwischen z und x/r_0 werden wir nun mittels des Impulssatzes gewinnen.

c) Impulssatz. Grenzen wir nach dem Vorbild von *H. Latzko* [1] durch zwei zur Rohrachse senkrechte Schnitte im Abstand dx ein Ringelement der Grenzschicht als Kontroll-

[1] *H. Latzko*, a. a. O.

fläche ab (Abb. 1), so ergibt sich für den Impulsfluß durch die Kontrollfläche in der Zeiteinheit

$$\varrho \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u^2 \, 2\pi r \, dr - \varrho \, u_1 \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u \, 2\pi r \, dr .$$

Das letzte Glied gibt dabei den Impulsfluß durch die obere Begrenzung der Grenzschicht mittels der Differenz des Massenflusses durch die senkrechten Begrenzungsflächen der Kontrollfläche an.

Für die auf die Kontrollfläche ausgeübten Druck- und Reibungskräfte erhält man

$$- \frac{dp}{dx} [\pi r_0^2 - \pi (r_0 - \delta)^2] - 2\pi r_0 \tau_0 .$$

Bezüglich der Druckkräfte ist zu bemerken, daß der aus der Verschiedenheit der Grenzschichtdicken resultierende Anteil kompensiert wird durch den Beitrag der oberen Begrenzung der Grenzschicht. Wir erhalten also

$$\varrho \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u^2 \, r \, dr - \varrho \, u_1 \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u \, r \, dr = - \frac{dp}{dx} \delta \left(r_0 - \frac{\delta}{2} \right) - r_0 \tau_0 . \tag{10}$$

Wir formen die Integrale in folgender Weise um:

$$\frac{1}{r_0 u_1} \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u \, r \, dr = \frac{d(\delta/r_0)}{d(x/r_0)} \left(1 - \frac{\delta}{r_0} \right) + \int_{1 - \delta/r_0}^{1} \frac{1}{u_1} \frac{\partial u}{\partial (x/r_0)} \frac{r}{r_0} \, d(r/r_0) .$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{u_1} \frac{\partial u}{\partial (x/r_0)} = \frac{\partial \varphi}{\partial (x/r_0)} + \varphi \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{d(x/r_0)} .$$

Für die Potentialströmung $u_1 (x)$ haben wir nach der *Bernoulli*schen Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = - \varrho \, u_1 \frac{du_1}{dx} .$$

Führen wir die Widerstandsziffer

$$\lambda = \frac{-(dp/dx)\,\delta}{(\varrho/2)\, u_1^2}$$

ein, so kommt schließlich

$$\frac{1}{r_0 u_1} \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u \, r \, dr = \frac{d(\delta/r_0)}{d(x/r_0)} \left(1 - \frac{\delta}{r_0} \right) + \int_{1 - \delta/r_0}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial (x/r_0)} \frac{r}{r_0} \, d(r/r_0) + \frac{\lambda}{2(\delta/r_0)} \int_{1 - \delta/r_0}^{1} \varphi \frac{r}{r_0} \, d(r/r_0) . \tag{11}$$

Analog erhält man

$$\frac{1}{r_0} \frac{1}{u_1^2} \frac{d}{dx} \int_{r_0 - \delta}^{r_0} u^2 \, r \, dr = \frac{d(\delta/r_0)}{d(x/r_0)} \left(1 - \frac{\delta}{r_0} \right) + 2 \int_{1 - \delta/r_0}^{1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial (x/r_0)} \frac{r}{r_0} \, d(r/r_0) + \frac{\lambda}{(\delta/r_0)} \int_{1 - \delta/r_0}^{1} \varphi^2 \frac{r}{r_0} \, d(r/r_0) . \tag{12}$$

Wir transformieren weiter auf den Wandabstand

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{1 - \frac{r}{r_0}}{\frac{\delta}{r_0}} ,$$

wobei zu beachten ist, daß

$$d(r/r_0) = - (\delta/r_0) \, d\eta , \qquad \left(\frac{\partial}{\partial (x/r_0)} \right)_{r/r_0} = \left(\frac{\partial}{\partial (x/r_0)} \right)_{\eta} - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)_{x/r_0} \cdot \eta \frac{(\delta/r_0)'}{\delta/r_0}$$

ist, wobei der Strich die Ableitung nach (x/r_0) bedeutet.

Man erhält dann letzten Endes für den Impulssatz

$$\left.\begin{aligned} c_1 = \lambda \int_0^1 \varphi(1-\varphi)\left(1-\eta\frac{\delta}{r_0}\right)d\eta + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 (1-\varphi)\left(1-\eta\frac{\delta}{r_0}\right)d\eta + \\ + \frac{d}{d(x/r_0)}\left[\frac{\delta}{r_0}\int_0^1 \varphi(1-\varphi)\left(1-\eta\frac{\delta}{r_0}\right)d\eta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Gehen wir hier mit unserer Näherungsfunktion (3) ein, so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varkappa^2}{z^3} = \lambda\frac{1}{z}\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{z}\right)\left(1-\frac{1}{4}\frac{\delta}{r_0}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{z}\frac{\delta}{r_0}\right] + \\ + \frac{d}{d(x/r_0)}\left\{\frac{\delta}{r_0}\frac{1}{z}\left[\left(1-\frac{2}{z}\right)\left(1-\frac{1}{4}\frac{\delta}{r_0}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{z}\frac{\delta}{r_0}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wir rechnen zunächst die Widerstandsziffer

$$\lambda = \frac{-(dp/dx)\,\delta}{(\varrho/2)\,u_1^2} = \frac{2}{u_1}\frac{du_1}{dx}\delta$$

auf die in der Praxis zur Anwendung kommende Widerstandsziffer

$$\bar{\lambda} = \frac{-(dp/dx)\,d}{(\varrho/2)\,w^2}$$

um. Das geht so: Mit

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{w}{(w/u_1)^2}\frac{d(w/u_1)}{dx} \tag{15}$$

erhalten wir zunächst

$$\lambda = \frac{-2\,(\delta/r_0)}{(w/u_1)}\frac{d(w/u_1)}{d(x/r_0)}. \tag{16}$$

Dann kommt

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda}{(\delta/r_0)}\frac{1}{(w/u_1)^2} = \frac{-4}{(w/u_1)^3}\frac{d(w/u_1)}{d(x/r_0)}. \tag{17}$$

Für die Gesamtwiderstandsziffer

$$\bar{\Lambda} = \int_0^{x/d}\bar{\lambda}\,d(x/d) \qquad \left(= -\frac{p(x/d)-p(0)}{(\varrho/2)\,w^2}\right)$$

folgt aus (17) die Formel

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{(w/u_1)^2} - 1. \tag{18}$$

Der gesamte Druckverlust im Rohreinlauf beträgt mithin nach (8) mit $\delta/r_0 = 1$ bzw. z_* [vgl. (9)]

$$\bar{\Lambda}_* = \frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\frac{1}{z_*}\right)^2} - 1. \tag{19}$$

Aus (16) folgt nunmehr durch Integration

$$x/r_0 = -\int_0^z \frac{2\,(\delta/r_0)}{\lambda}\frac{1}{w/u_1}\frac{d(w/u_1)}{dz}\,dz. \tag{20}$$

Hier sind δ/r_0 und w/u_1 nach (8) und (9) als Funktionen von z bekannt. Für $\frac{d(w/u_1)}{dz}$ erhält man aus (8) unter Benutzung von (9)

$$\frac{d(w/u_1)}{dz} = \left(\frac{\delta/r_0}{z}\right)^2\left[\frac{1}{2}+\frac{C}{e^z}\left(-2+\frac{\delta}{r_0}\right)\right]. \tag{21}$$

Um die Integration in (20) durchführen zu können, benötigen wir noch λ als Funktion von z. Diese Beziehung liefert uns jetzt der Impulssatz (14). Setzen wir dort $\frac{d}{d(x/r_0)} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{dz}{d(x/r_0)}$ und nach (16) $\frac{dz}{d(x/r_0)} = -\frac{\lambda}{2(\delta/r_0)} \frac{w/u_1}{\frac{d(w/u_1)}{dz}}$,

so kommt

$$\lambda = \frac{2\varkappa^2}{h_1(z) - \frac{w/u_1}{\frac{d(w/u_1)}{dz}} \frac{1}{\delta/r_0} h_2(z)}$$

mit

$$h_1(z) = (3z - 4)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\delta}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{\delta}{r_0}.$$

$$h_2(z) = C\left(\frac{\delta/r_0}{z}\right)^2 \frac{z}{e^z}\left[(z-2)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\delta}{r_0}\right) - \frac{1}{4} z \frac{\delta}{r_0}\right] + \frac{\delta/r_0}{z}\left(2 - \frac{1}{4} z \frac{\delta}{r_0}\right). \qquad (22)$$

w/u_1 bzw. $\frac{d(w/u_1)}{dz}$ nach (8) bzw. (21).

Wir fassen zusammen: Mit $z = \varkappa/\sqrt{c_1}$ ergeben sich nach (8) w/u_1, nach (9) δ/r_0 und nach (22) λ als explizite Funktionen von z. z als Funktion von x/r_0 ergibt sich dann aus (20). Die Quadratur ist nur mit approximativen Mitteln durchführbar.

3. Ergebnisse[1]. Untersucht wurden nach dem in Abschn. 2 angegebenen Formelsystem die Fälle

$$\overline{Re} = 10^5, \quad 5 \cdot 10^5, \quad 10^6, \quad 5 \cdot 10^6.$$

Das in (20) vorkommende Integral wurde dabei mittels graphischer Integration ausgewertet.

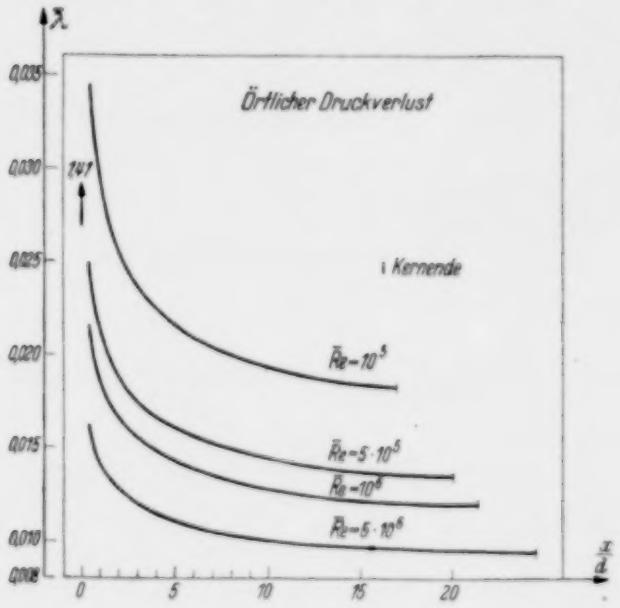


Abb. 2.

Die Widerstandsbeiwerte sind in den Abb. 2 bis 4 dargestellt. Bezüglich des in Abb. 2 enthaltenen örtlichen Druckverlustes $\overline{\lambda}$ ist zu bemerken, daß der maximale Wert $\overline{\lambda} = 1{,}411$

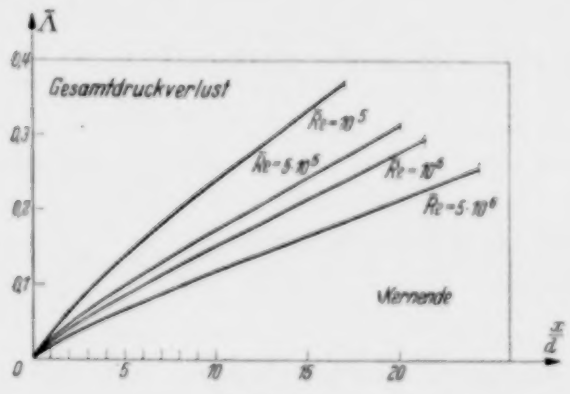


Abb. 3.

unmittelbar am Eintrittsquerschnitt angenommen wird (bei $x/d \approx 10^{-6}$); für $x/d = 0$ selbst ergibt sich $\overline{\lambda} = 0{,}706$. Abb. 3 gibt den Gesamtdruckverlust $\overline{\Lambda}$ an, Abb. 4 die Wandschubspannung c_f'. Es ergibt sich u. a. das für die technische Praxis wichtige Ergebnis, daß der Druckverlust des gesamten Einlaufs gegenüber einem mit den Werten der ausgebildeten Rohrströmung berechneten Verlust um folgende Prozentzahlen höher liegt:

$\overline{Re} =$	10^5	$5 \cdot 10^5$	10^6	$5 \cdot 10^6$
	22%	19,4%	18%	14%.

Abb. 5 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit in Rohrachse.

Die Maße des Einlaufvorganges geben Abb. 6 bis 8 an. Abb. 6 enthält die Kernlänge, Abb. 7 die Grenzschichtdicke. In Abb. 8 schließlich ist die Geschwindigkeitsverteilung im Einlauf mittels der Isotachen dargestellt.

[1] Die numerische Rechnung hat mein Mitarbeiter Herr *Herbert Moch* durchgeführt.

Experimentelle Ergebnisse, die einen Vergleich mit der Theorie gestatten würden, liegen leider nicht vor. Es gibt jedoch einige Hinweise, daß die Rechnung sachgemäß ist: Zunächst einmal haben die Kernlängen die erwartete Größenordnung. Die Veränderlichkeit der Kernlänge mit $\overline{Re}$ ist in Übereinstimmung mit *Nikuradse* verhältnismäßig schwach (vgl. Abschn. 1). Ferner darf man erwarten, daß die Kennwerte am Kernende nur unerheblich und in einem

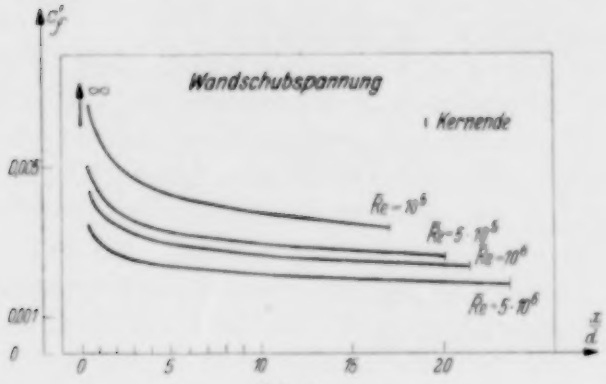


Abb. 4.

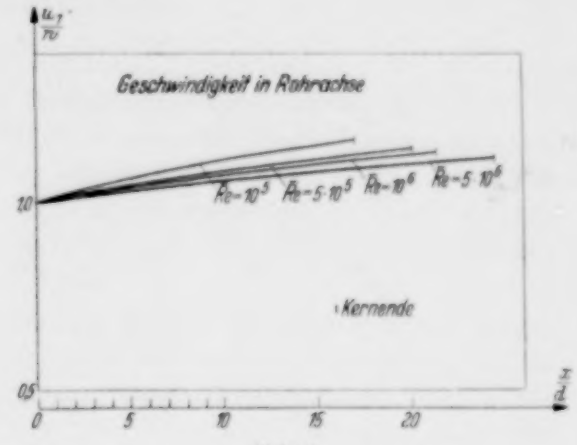


Abb. 5.

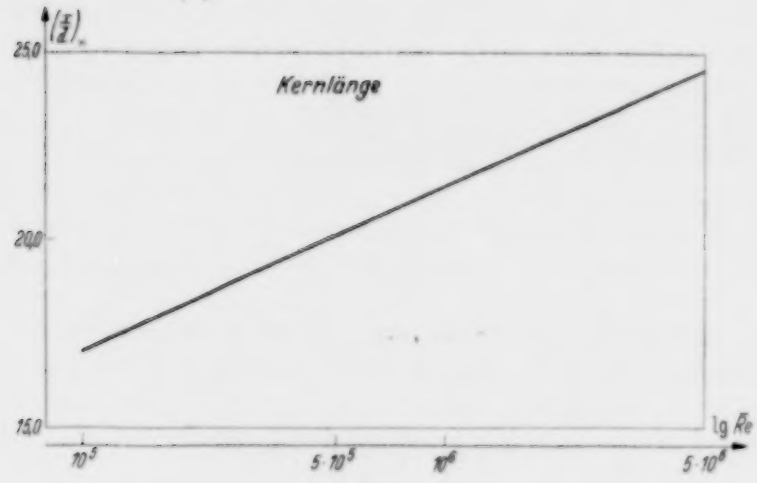


Abb. 6.

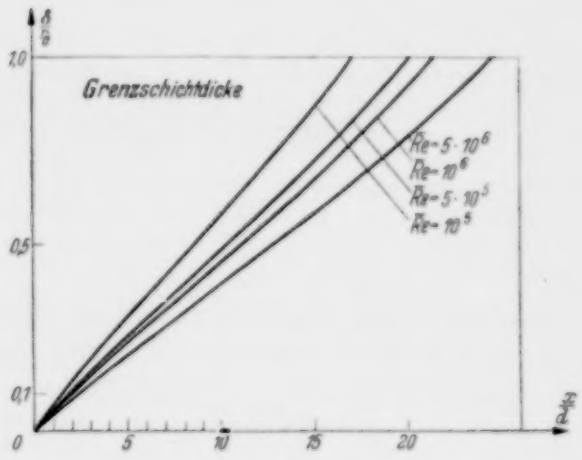


Abb. 7.

systematischen Sinn von den Kennwerten der ausgebildeten Rohrströmung abweichen. Das ist nun auch der Fall, wie aus Tabelle 1 zu ersehen ist, in der für das Kernende berechnete Werte mit den entsprechenden der *Nikuradse*schen [1] Messung der ausgebildeten Rohrströmung verglichen werden.

Tabelle 1.

$\overline{Re}$	$\overline{\lambda}$		w/u_1	
	Kernende, Theorie	Ausgebildete Rohrstr., Exp.	Kernende, Theorie	Ausgebildete Rohrstr., Exp.
10^5	0,0182	0,0178	0,854	0,839
$5 \cdot 10^5$	0,0135	0,0131	0,872	0,8585
10^6	0,0120	0,01165	0,879	0,8655
$5 \cdot 10^6$	0,0093	0,0092	0,892	0,880

Man sieht auch, daß man den Übergangsbereich (vgl. Einleitung) in guter Näherung nach den Daten der ausgebildeten Rohrströmung berechnen kann.

[1] *J. Nikuradse*, a. a. O.

4. Zusammenfassung. Der Einlaufvorgang einer turbulenten Rohrströmung wird theoretisch untersucht, indem die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht durch das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz approximiert wird. Dabei werden die empirischen Koeffizienten

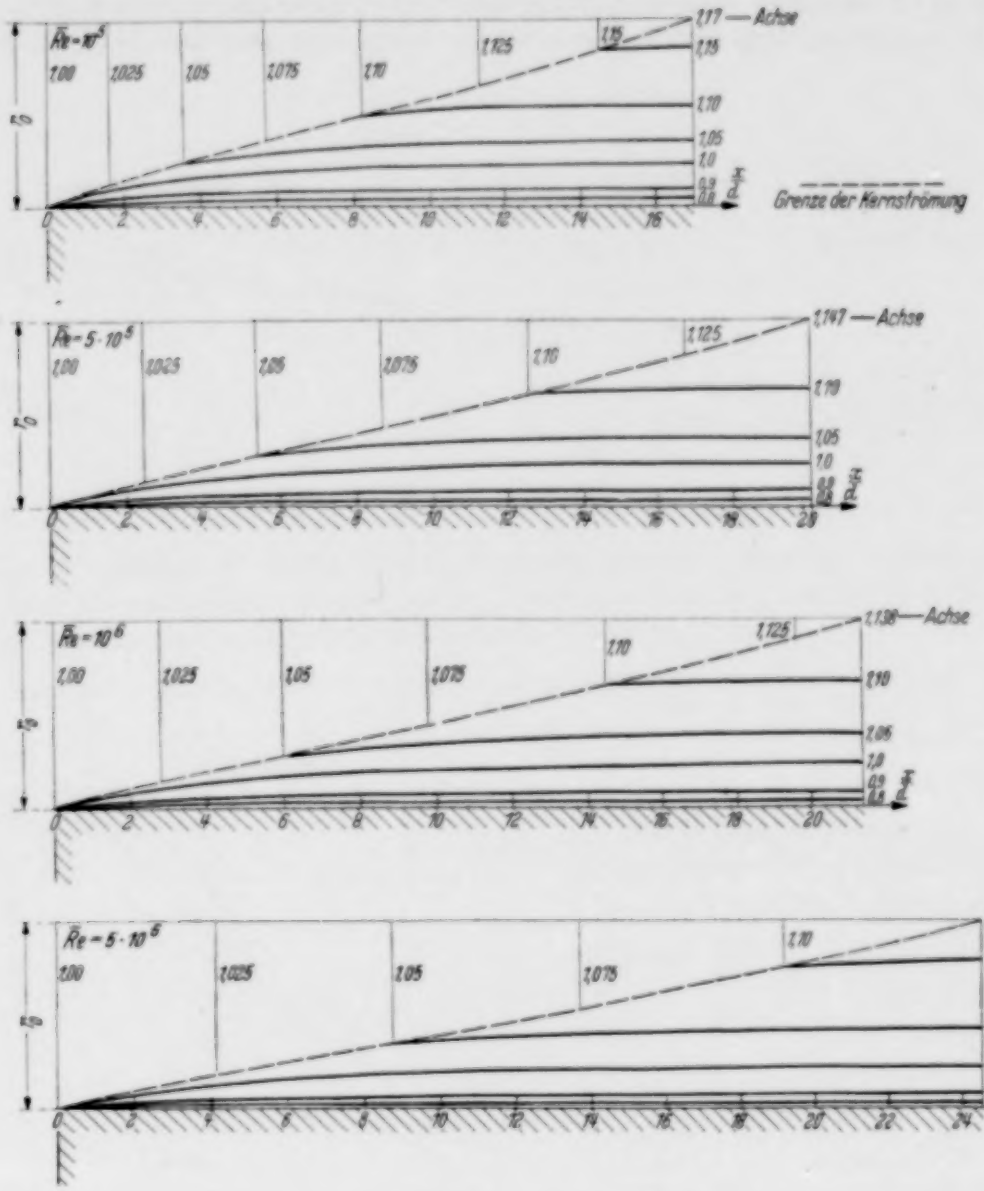


Abb. 8. Bild der Isotachen $\frac{u}{w} = \text{const.}$

dieses Gesetzes der Theorie der voll ausgebildeten Rohrströmung entnommen. Die Kernströmung wird als Potentialströmung behandelt. Berechnet werden örtlicher Druckverlust, Gesamtdruckverlust und die Wandschubspannung; ferner die Kernlängen und die Geschwindigkeitsverteilung im Einlauf.

(Eingegangen am 24. Dezember 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Forschungsinstitut für Mathematik, Abt. Angewandte Mathematik, Berlin W 8, Jägerstraße 22/23.

Über die Biegung von Platten durch Einzellasten mit rechteckiger Aufstandsfläche.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Wird eine dünne elastische Platte einer transversalen Punktlast ausgesetzt, so zeigen bekanntlich die Biegemomente der Platte ein unbegrenztes Anwachsen mit der Annäherung an den Angriffspunkt der Last. Hat man es also mit der Bemessung der Platte zu tun, so muß eine endliche Ausdehnung des Lastgebietes in mindestens einer Richtung angenommen werden, um zu praktisch brauchbaren Ergebnissen zu gelangen.

Die Einzelkraft greife also zuerst einmal als eine Punktlast an und erzeuge gewisse Biegemomente am Umfang eines um den Lastpunkt geschlagenen Kreises, dessen Halbmesser klein sein möge im Verhältnis zu den Abmessungen des Plattengebietes; alsdann verteile sich die gleiche Last achsensymmetrisch, insbesondere gleichförmig, auf die Fläche jenes Kreises und verursache gewisse, nunmehr endliche Biegemomente in der Kreismitte. Ein einfaches von *A. Nadai*[1] herrührendes Verfahren erlaubt es dann, von den zuerstgenannten, durch die *Green*sche Funktion des gegebenen Plattengebietes definierten Momenten auf die Momente im Zentrum der Druckfläche zu schließen.

Indes haben die bei der Bemessung von Bauwerken auftretenden oder vorgeschriebenen Einzellasten, so z. B. die Raddrücke von Straßen-Fahrzeugen oder Maschinenfundamente, meist rechteckige Aufstandsflächen. Es liegt also nahe zu versuchen, die *Nadai*sche Näherungsmethode der Momentenbestimmung auf rechteckige Druckflächen auszudehnen. Die Last möge sich dabei gleichmäßig auf ihre rechteckige Aufstandsfläche verteilen. Die Lösung eines spezielleren, diese Belastungsform implizierenden Problems sei den weiteren Ausführungen vorausgeschickt.

2. Eingespannte Kreisplatte unter einer gleichförmig auf eine Rechteckfläche verteilten Last. Wir betrachten eine an ihrem Rande $x^2 + y^2 = a^2$ eingespannte Kreisplatte, die zunächst an beliebiger Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ eine Punktlast P trägt. Führt man zur Vereinfachung der Schreibweise komplexe Koordinaten

$$z = \frac{x}{a} + i\frac{y}{a}, \qquad \bar{z} = \frac{x}{a} - i\frac{y}{a} \tag{1}$$

ein, wobei der Lastpunkt durch

$$\zeta = \frac{\xi}{a} + i\frac{\eta}{a}, \qquad \bar{\zeta} = \frac{\xi}{a} - i\frac{\eta}{a} \tag{2}$$

gegeben ist, so erhält man die wohlbekannte Lösung von *J. H. Michell*[2] für diesen Belastungsfall in der Form

$$W = \frac{P a^2}{16 \pi D}\left[(1 - z\bar{z})(1 - \zeta\bar{\zeta}) + (z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) \ln \frac{(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(1 - z\bar{\zeta})(1 - \bar{z}\zeta)}\right]. \tag{3}$$

sofern D die Biegesteifigkeit der Platte bedeutet.

Für alles Folgende sind nur die Biegemomente M_x und M_y im Mittelpunkt der Platte $z = 0$, $\bar{z} = 0$ von Interesse, wofür die allgemeinen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} M_x + M_y &= -4D(1 + \nu)\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial \bar{z}}, \\ M_x - M_y &= -2D(1 - \nu)\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2}\right) \end{aligned}\right| \tag{4}$$

lauten, wo ν die Querdehnungszahl sein soll.

---

[1] *A. Nadai*, Die elastischen Platten, S. 62 ff., Berlin 1925.
[2] *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 34 (1902), S. 223.

Geht man mit (3) in die Gleichungen (4) ein und setzt noch zum Schluß $z = \bar{z} = 0$, so erhält man nach einfacher Rechnung

$$\left.\begin{aligned} M_x + M_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\pi}\left(\ln\frac{a^2}{\xi^2+\eta^2} + \frac{\xi^2+\eta^2}{a^2} - 1\right), \\ M_x - M_y &= \frac{(1-\nu)\,P}{4\pi}\left(2\,\frac{\xi^2-\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^4-\eta^4}{a^4} - \frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Es möge nun eine gleichförmige Verteilung der Last P auf eine zentrisch gelegene Rechteckfläche $s \cdot t$ angenommen werden, die ganz innerhalb des Plattengebietes liegt (Abb. 1). Die zugehörigen Biegemomente m_x, m_y im Plattenmittelpunkt sind dann durch die Ausdrücke

$$m_x \pm m_y = \frac{4}{s\,t}\left[\int_0^{s/2} d\xi \int_0^{\xi\,t/s} (M_x \pm M_y)\,d\eta + \int_0^{t/2} d\eta \int_0^{\eta\,s/t} (M_x \pm M_y)\,d\xi\right] \tag{6}$$

gegeben. Unter der angenommenen Einschränkung $s^2 + t^2 \leq (2a)^2$ gelangt man nach sukzessiver Einsetzung der beiden Ausdrücke (5) in die Gleichung (6) zu den folgenden Ergebnissen:

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)\,P}{4\pi}\left[2 - \ln\frac{s^2+t^2}{4a^2} - \left(\frac{t}{s}\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{t} + \frac{s}{t}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{s}\right) + \frac{s^2+t^2}{12\,a^2}\right], \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)\,P}{4\pi}\left[\frac{t}{s}\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{t} - \frac{s}{t}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{s} + \frac{s^2-t^2}{6\,a^2} - \frac{s^4-t^4}{80\,a^4}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

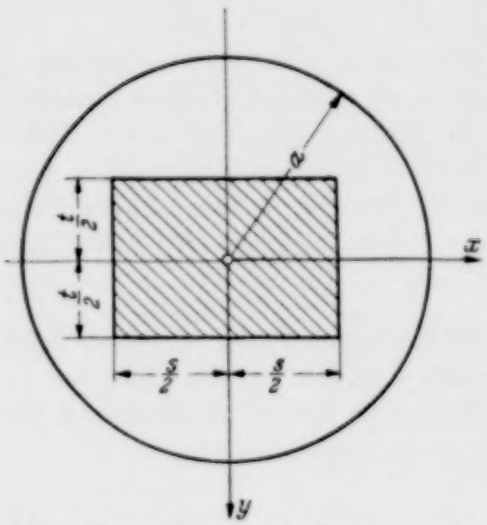


Abb. 1. Kreisplatte mit rechteckiger Aufstandsfläche der Last.

In einigen Sonderfällen der Rechteckfläche erhält man besonders einfache Momentenausdrücke. Ist beispielsweise die Druckfläche ein in den Plattenumfang eingeschriebenes Quadrat $\left(s = t = a\sqrt{2}\right)$, so wird

$$m_x = m_y = \frac{(1+\nu)\,P}{48\,\pi}\,(14 - 3\,\pi)\,, \tag{8}$$

und im Falle einer gleichmäßig über den Durchmesser $x = 0$ verteilten Linienlast $(s = 0,\ t = 2a)$ ergibt sich

$$m_x = \frac{(7+3\,\nu)\,P}{30\,\pi}\,, \qquad m_y = \frac{(3+7\,\nu)\,P}{30\,\pi}\,. \tag{9}$$

Ist nun die Last P, anstatt auf eine Rechteckfläche, auf eine durch $x^2 + y^2 = c^2$ begrenzte Kreisfläche gleichförmig verteilt, so liefert die erste der beiden Gleichungen (5), wenn man darin $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2$ setzt, den folgenden Ausdruck für die Momentensumme in der Plattenmitte:

$$m_x + m_y = \frac{(1+\nu)\,P}{4\,\pi^2\,c^2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{c}\left(2\ln\frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho^2}{a^2} - 1\right)\varrho\,d\varrho = \frac{(1+\nu)\,P}{2\,\pi}\left(\ln\frac{a}{c} + \frac{c^2}{4\,a^2}\right). \tag{10}$$

während zu gleicher Zeit $m_x - m_y = 0$ wird. Die Formeln (7) und (10) bilden in Verbindung mit dem Verfahren von *Nadai* die Grundlage für die Lösung der eingangs gestellten Aufgabe.

3. Einzellast mit kreisförmiger Aufstandsfläche. Im Hinblick auf die beabsichtigte Erweiterung des *Nadai*schen Verfahrens weicht dessen nachstehende Formulierung von der bei *Nadai* gegebenen verschiedentlich, doch nicht dem Wesen nach, ab.

Eine im Mittelpunkt $x = 0$, $y = 0$ einer freiaufliegenden Kreisplatte vom Halbmesser a_0 angreifende Punktlast P erzeugt in $x = c$, $y = 0$ die durch die beiden folgenden Ausdrücke gegebenen Biegemomente

$$\left.\begin{aligned} m_x' + m_y' &= \frac{(1+\nu)\,P}{2\,\pi}\ln\frac{a_0}{c} + \frac{(1-\nu)\,P}{4\,\pi}\,, \\ m_x' - m_y' &= -\frac{(1-\nu)\,P}{4\,\pi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Verteilt sich nun dieselbe Last P gleichmäßig auf eine mit dem Plattenrand konzentrische Kreisfläche, dessen Halbmesser c klein ist im Verhältnis zu a_0, so entsteht im Mittelpunkt der

Druckfläche

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\ln\frac{a_0}{c} + \frac{P}{2\pi}, \\ m_x - m_y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

sofern man dabei die in c quadratischen Glieder unterdrückt. Aus dem Vergleich der beiden vorstehenden Gleichungsgruppen entspringt die zunächst für die freigestützte Kreisplatte gültige einfache Relation

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= m_x' + m_y' + \frac{(1+\nu)P}{4\pi}, \\ m_x - m_y &= m_x' - m_y' + \frac{(1-\nu)P}{4\pi}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

die es erlaubt, von den Spannungsmomenten in der Umgebung einer Punktlast auf die Momente im Mittelpunkt einer kreisförmigen Druckfläche zu schließen.

Die gegebene Platte besitze nun hinsichtlich ihrer Randbedingungen mindestens eine Symmetrieachse, sei aber im übrigen beliebig begrenzt und gelagert. Die angenommene Symmetrieachse enthalte den Angriffspunkt $x = 0$, $y = 0$ der Einzelkraft P und möge zur x-Achse des Koordinatensystems gewählt werden. Spannungsmomente, die die Punktlast in $x = c$, $y = 0$ erzeugt, lassen sich dann in der Form

$$\left.\begin{aligned} m_x' + m_y' &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\left(\ln\frac{l}{c} + \frac{1}{2}A\right), \\ m_x' - m_y' &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}B, \\ m_{xy}' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

anschreiben, sofern man wiederum Glieder, die c in der zweiten oder höheren Potenz enthalten, unterdrückt. Dabei sind A und B gewisse Konstanten und l eine Bezugslänge. Man kann die Konstante A auch fortlassen, wenn man die Länge l durch $l' = l\sqrt{e^A}$ ersetzt, doch ist der vorhin gewählte Ausdruck praktisch bequemer.

Nach einem Vergleich mit (11) läßt sich der Spannungszustand (14) als ein um einen homogenen Zustand erweiterte Spannungszustand einer Kreisplatte deuten. Greift also die Einzelkraft P nicht als eine Punktlast, sondern als eine gleichförmig auf einen Druckkreis $x^2 + y^2 = c^2$ verteilte Last an, so schreiben sich die Spannungsmomente im Mittelpunkt dieses Kreises auf Grund von (13) in der Form

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{l}{c} + A + 1\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}(B+1). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Das Problem, die Biegemomente im Mittelpunkt des Druckkreises zu bestimmen, wird somit auf die Konstruktion von Ausdrücken von der Form (14) zurückgeführt, was stets gelingen wird, wenn die *Green*sche Funktion der Platte für die vorgeschriebenen Randbedingungen bekannt ist.

4. Einzellast mit rechteckiger Aufstandsfläche. Wir betrachten zuerst den Sonderfall der zentrisch auf einer rechteckigen Druckfläche belasteten eingespannten Kreisplatte (Abb. 1). Sind die Längen s und t klein gegen den Halbmesser a der Platte und unterdrückt man dementsprechend die zweiten und vierten Potenzen von s/a, t/a gegen die Einheit in den Formeln (7), so reduzieren sich diese auf die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left[2\ln\frac{2a}{d} + 2 - \varphi(k)\right], \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}\psi(k). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierin ist

$$k = \frac{t}{s} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(k) &= \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = k \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} k\,, \\ \psi(k) &= -\psi\left(\frac{1}{k}\right) = k \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} k \end{aligned}\right| \tag{18}$$

und, schließlich

$$d = \sqrt{s^2 + t^2}. \tag{19}$$

Ist nun die Aufstandsfläche der Last ein Kreis, dessen Halbmesser c klein sein möge im Verhältnis zu a, so folgt aus der Formel (10) näherungsweise der erste der beiden folgenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \ln \frac{a}{c}\,, \\ m_x - m_y &= 0\,, \end{aligned}\right| \tag{20}$$

während der zweite nach wie vor genau gilt. Ein Vergleich der Gleichungspaare (16) und (20) zeigt, daß die rechteckige Druckfläche $s \cdot t$ der Last einer kreisförmigen Fläche gleichwertig wird, wenn man den Halbmesser dieser letzteren gleich

$$c = \frac{d}{2}\, e^{\frac{\varphi}{2} - 1} \tag{21}$$

setzt und die Momentendifferenz

$$m_x - m_y = \frac{(1-\nu)P}{4\pi}\psi \tag{22}$$

mitberücksichtigt.

Die für einige Verhältniszahlen $k = t/s$ berechneten Werte der Hilfsfunktionen $\varphi(k)$ und $\psi(k)$ sind in der folgenden Tabelle enthalten. Die Anwendung der gewonnenen Ergebnisse auf einige Sonderfälle von Plattenbegrenzung wird in den nächsten Abschnitten gezeigt.

Tabelle 1. *Werte* φ und ψ.

k	φ	ψ	k	φ	ψ	k	φ	ψ
0	1,0000	—1,0000	1,0	1,5708	0,0000	2,5	1,4274	0,4752
0,05	1,0752	—0,9231	1,1	1,5689	0,0543	3,0	1,3816	0,5489
0,1	1,1438	—0,8496	1,2	1,5637	0,1036	4,0	1,3114	0,6485
0,2	1,2617	—0,7123	1,3	1,5563	0,1485	5,0	1,2617	0,7123
0,3	1,3553	—0,5877	1,4	1,5473	0,1894	6,0	1,2252	0,7566
0,4	1,4274	—0,4752	1,5	1,5372	0,2268	7,0	1,1974	0,7891
0,5	1,4809	—0,3737	1,6	1,5264	0,2611	8,0	1,1756	0,8140
0,6	1,5189	—0,2825	1,7	1,5152	0,2927	9,0	1,1582	0,8337
0,7	1,5445	—0,2004	1,8	1,5037	0,3218	10	1,1438	0,8496
0,8	1,5603	—0,1266	1,9	1,4923	0,3488	20	1,0752	0,9231
0,9	1,5684	—0,0601	2,0	1,4809	0,3737	∞	1,0000	1,0000

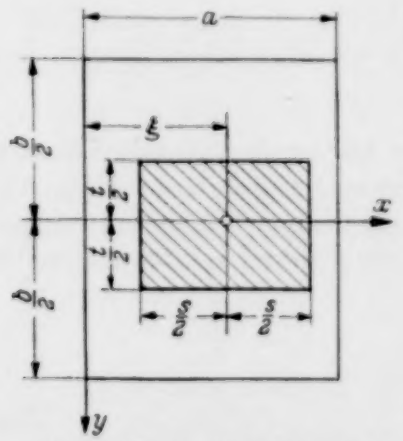


Abb. 2. Rechteckige Platte im Koordinatensystem.

5. Die allseitig freiaufliegende Rechteckplatte. Ist zunächst eine Punktlast P gegeben, die an der Stelle $x = \xi$, $y = 0$ (Abb. 2) angreift, so sind die Biegemomente längs der Mittellinie $y = 0$ durch die Ausdrücke[1]

$$\left.\begin{aligned} m'_x + m'_y &= \frac{(1+\nu)P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Tg}\,\alpha_n}{n} \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}\,, \\ m'_x - m'_y &= -\frac{(1-\nu)P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n\,\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_n} \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

mit der Abkürzung $\alpha_n = n\pi\, b/2a$ bestimmt. Ein Teil der ersten Summe (23) läßt sich geschlossen darstellen, wenn man be-

[1] Vgl. z. B. *S. Timoshenko*, Theory of plates and shells, S. 159. New York 1940.

achtet, daß $\mathfrak{Tg}\,\alpha_n = 1 - e^{-\alpha_n}/\mathfrak{Cof}\,\alpha_n$ ist und daß außerdem die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin\dfrac{\pi(x+\xi)}{2a}}{\left|\sin\dfrac{(x-\xi)}{2a}\right|} \tag{24}$$

gilt. Nimmt man noch die Entfernung $|x - \xi| = c$ als klein gegen a an und setzt dementsprechend

$$\sin\frac{\pi(x+\xi)}{2a} \approx \sin\frac{\pi\xi}{a}, \qquad \left|\sin\frac{\pi(x-\xi)}{2a}\right| \approx \frac{\pi c}{2a},$$

so erhält man auf der Mittellinie $y = 0$, im Abstande c von der Last, die Momente

$$\left.\begin{aligned} m_x' + m_y' &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\left(\ln\frac{2a\sin\dfrac{\pi\xi}{a}}{\pi c} - 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{e^{-\alpha_n}}{n\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n}\sin^2\frac{n\pi\xi}{a}\right), \\ m_x' - m_y' &= -\frac{(1-\nu)P}{2\pi}\cdot\frac{\pi b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\sin^2\dfrac{n\pi\xi}{a}}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_n} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

in Übereinstimmung mit der Form der Gleichungen (14).

Geht man einen Schritt weiter und verteilt die Last P gleichförmig auf eine Kreisfläche vom Halbmesser c, so erhält man die Biegemomente im Mittelpunkt $x = \xi$, $y = 0$ der Kreisfläche, indem man die Beziehungen (13) beachtet in der durch die Gleichungen (15) festgelegten Form. Es gilt[1]

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{2a\sin\dfrac{\pi\xi}{a}}{\pi c} - 4\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{e^{-\alpha_n}}{n\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n}\sin^2\frac{n\pi\xi}{a} + 1\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}\left(1 - \frac{2\pi b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_n}\sin^2\frac{n\pi\xi}{a}\right). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Der Übergang zur rechteckigen Druckfläche vollzieht sich nur durch Substitution des Ausdruckes (21) für c, sowie durch Hinzufügung der Momentendifferenz (22). Das Ergebnis läßt sich in der Form

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{4a\sin\dfrac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}(\mu + \psi) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

darstellen, wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 3 - 4\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{e^{-\alpha_n}}{\mathfrak{Cof}\,\alpha_n}\sin^2\frac{n\pi\xi}{a}, \\ \mu &= 1 - \frac{2\pi b}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha_n}\sin^2\frac{n\pi\xi}{a} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

gesetzt ist. Die nur vom Seitenverhältnis b/a sowie der Lastenstellung, nicht aber von der Art der Lastenkonzentration abhängigen Werte λ und μ findet man in der Tabelle 2 zusammengestellt.

---

[1] Gleichwertige Formeln finden sich bei *S. Timoshenko*, Bauingenieur 3 (1922), S. 51 ff.

Tabelle 2. *Werte λ und μ für die rechteckige Platte.*

$\frac{\xi}{a}$ \ $\frac{b}{a}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
						λ							
0,1	2,792	2,861	2,904	2,933	2,952	2,966	2,982	2,990	2,995	2,997	2,999	3,000	3,000
0,2	2,352	2,545	2,677	2,768	2,832	2,879	2,936	2,966	2,982	2,990	2,995	3,000	3,000
0,3	1,945	2,227	2,433	2,584	2,694	2,776	2,880	2,936	2,966	2,982	2,990	3,000	3,000
0,4	1,686	2,011	2,259	2,448	2,591	2,698	2,836	2,912	2,953	2,975	2,987	2,999	3,000
0,5	1,599	1,936	2,198	2,399	2,553	2,669	2,820	2,903	2,948	2,972	2,985	2,999	3,000
						μ							
0,1	0,557	0,677	0,758	0,814	0,856	0,887	0,931	0,958	0,975	0,985	0,991	0,999	1,000
0,2	−0,179	0,053	0,240	0,391	0,456	0,611	0,756	0,849	0,908	0,945	0,968	0,998	1,000
0,3	−0,647	−0,439	−0,229	−0,031	0,148	0,304	0,551	0,719	0,828	0,897	0,939	0,996	1,000
0,4	−0,852	−0,701	−0,514	−0,310	−0,108	0,080	0,393	0,616	0,764	0,858	0,915	0,995	1,000
0,5	−0,906	−0,779	−0,605	−0,404	−0,198	0,000	0,335	0,578	0,740	0,843	0,906	0,994	1,000

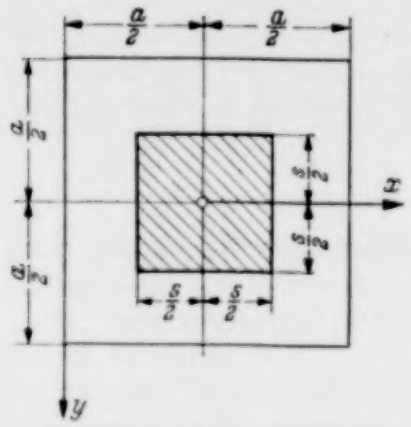


Abb. 3. Quadratische Platte mit quadratischer Lastfläche in der Mitte.

Die Anwendung der Formeln (27) möge am Beispiel einer quadratischen Druckfläche in der Mitte einer quadratischen Platte gezeigt werden (Abb. 3). Mit $k = 1$, $b/a = 1$, $\xi/a = 0{,}5$ und $d = s\sqrt{2}$ geht der Ausdruck (27) für die Momentensumme über in

$$m_x + m_y = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{a\sqrt{8}}{\pi s} + 1{,}0976\right), \tag{29}$$

während die Momentendifferenz $m_x - m_y$ naturgemäß verschwindet. Daß die Unsicherheit der vorstehenden Formel selbst bei gleichförmiger Lastverteilung über die Platte ($s = a$) in praktisch erträglichen Grenzen bleibt, zeigt die folgende Zusammenstellung

Tabelle 3. *Spannungsmomente $m_x = m_y$ in der Mitte der Platte nach Abb. 3, $\nu = 0{,}3$.*

s/a	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	Faktor
Näherungsformel (29)	0,2841	0,2124	0,1407	0,0987	0,0690	0,0459	P
Strenge Lösung [1]	0,284	0,214	0,141	0,099	0,070	0,048	P

6. Der freiaufliegende Plattenstreifen. Die betreffende Lösung ist als Grenzfall bereits in den Formeln (27) enthalten, doch möge sie im folgenden direkt aus den *Nadai*schen Momentenausdrücken hergeleitet werden. Verteilt sich die Last P gleichförmig auf eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt in $x = \xi$, $y = 0$ (Abb. 4) und ist c der Halbmesser des Kreises, so sind die Spannungsmomente in Kreismitte durch

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{2a\sin\frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

gegeben[2]. Die Berücksichtigung der Relation (21) sowie der zusätzlichen Momentendifferenz (22) führt zu den Biegemomenten

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{4a\sin\frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + 3 - \varphi\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}(1+\psi), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

die nunmehr für die Mitte $x = \xi$, $y = 0$ der rechteckigen Druckfläche gelten.

[1] Nach *S. Timoshenko*, Theory of plates and shells, S. 155.
[2] Vgl. *A. Nadai*, a. a. O. S. 98.

Zum Vergleich sei die strenge Lösung für den gleichen Belastungsfall herangezogen, die unter der Annahme $\xi = a/2$ die nämlichen Biegemomente in der Form[1]

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{\pi^3 \sigma \tau} \sum_{n=1}^{\infty}{}' (1 - e^{-n\pi\tau}) \frac{\sin n\pi\sigma}{n^3}, \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{\pi^3 \sigma \tau} \sum_{n=1}^{\infty}{}' [1 - (1 + n\pi\tau)\, e^{-n\pi\tau}] \frac{\sin n\pi\sigma}{n^3} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

liefert, sofern $\sigma = s/2a$ und $\tau = t/2a$ gesetzt wird. Die Genauigkeit der Näherungsmethode kann nach den in der Tabelle 4 zusammengestellten Ergebnissen einer numerischen Auswertung beider Formelgruppen beurteilt werden.

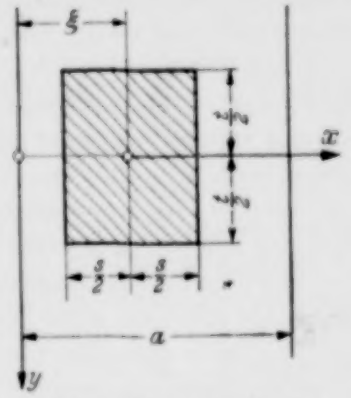


Abb. 4. Plattenstreifen im Koordinatensystem.

Tabelle 4. *Spannungsmomente in der Mitte der Lastfläche nach Abb. 4, $\xi/a = 0{,}5, \nu = 0{,}3$.*

Lastfläche	s/a t/a	0,1 0,1	0,2 0,1	0,1 0	0 0,1	0,1 0,2	0,2 0,5	0,5 0,5	1 0	Faktor
Näherungsformel (31)	m_x m_y	0,339 0,273	0,276 0,241	0,367 0,367	0,422 0,311	0,297 0,220	0,257 0,202	0,163 0,107	0,129 0,129	P
Strenge Lösung (32)	m_x m_y	0,339 0,273	0,276 0,241	0,367 0,367	0,422 0,311	0,296 0,221	0,257 0,202	0,161 0,109	0,121 0,121	P

Bei exzentrischer Stellung der Last ($\xi \neq a/2$) sind die Spannungsmomente in der Mitte der Lastfläche nicht mehr die absolut größten Plattenmomente, was natürlich auch für die rechteckige Platte gilt. Der relative Unterschied dieser beiden Momente ist sicherlich umso kleiner, je näher die Last zu der Mitte des Plattenstreifens rückt und je größer die Lastkonzentration ist, doch kann hier auf diese Frage nicht weiter eingegangen werden.

7. Die zentrisch belastete gleichseitige Dreieckplatte. Alle drei Ränder der in Abb. 5 dargestellten Platte seien gelenkig gelagert. Eine strenge Behandlung des dargestellten Belastungsfalles würde sich recht weitläufig gestalten; handelt es sich aber nur um die Bestimmung der größten, in der Plattenmitte auftretenden, Spannungsmomente, so führt die im Abschnitt 4 entwickelte Methode rasch und mit praktisch völlig ausreichender Genauigkeit zum Ziele.

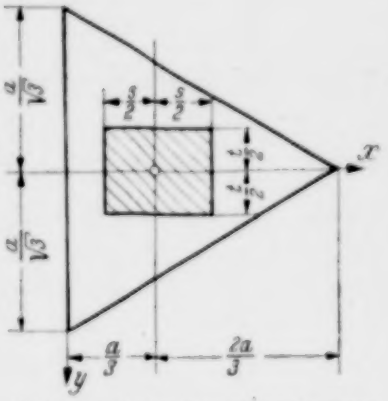


Abb. 5. Gleichseitige Dreiecksplatte mit rechteckiger Lastfläche in der Mitte.

Verteilt sich die Last P zunächst gleichförmig auf eine zentrische Kreisfläche vom Halbmesser c, so gilt für die Spannungsmomente in Kreismitte der Ausdruck[2]

$$m_x + m_y = \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\left(\ln\frac{a}{c} - 0{,}474\right). \quad (33)$$

Ersetzt man wiederum c durch den Ausdruck (21) und beachtet noch die Momentendifferenz (22), so erhält man für die Momente in der Mitte der rechteckigen Druckfläche die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} m_x + m_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(2\ln\frac{2a}{d} - \varphi + 1{,}052\right), \\ m_x - m_y &= \frac{(1-\nu)P}{4\pi}\psi, \end{aligned}\right| \quad (34)$$

womit die Aufgabe bereits gelöst ist. Die von dem Seitenverhältnis der Druckfläche abhängigen Hilfswerte φ und ψ sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

8. Schlußbemerkungen. Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Verfahren erlaubt es, von der Spannungsverteilung in der Umgebung einer Punktlast auf die Spannungsmomente im

[1] Vgl. S. *Timoshenko*, Theory of plates and shells, S. 173.
[2] Vgl. S. *Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 260.

Schwerpunkt einer rechteckigen Druckfläche der Last zu schließen, dessen Lage mit der Stellung der Punktlast zusammenfällt. Die Genauigkeit des Verfahrens ist für die Zwecke der Plattenbemessung völlig ausreichend und in der Regel umso besser, je stärker die Last konzentriert ist, je schlechter also die Reihenausdrücke der zugehörigen strengen Lösung konvergieren.

Selbstverständlich kann das neue Verfahren nicht die Methode der Einflußflächen ersetzen, es erscheint aber mehr geeignet als diese letztere für den speziellen, hier beabsichtigten Zweck. Denn selbst wenn die Einflußflächen für die beiden in Frage kommenden Spannungsmomente m_x und m_y bereits vorliegen, wird ihre Auswertung mindestens ebensoviel Zeit beanspruchen wie die Auswertung einer logarithmischen und einer zweiten, noch einfacheren, Formel.

Das Verfahren setzt eine gleichförmige (allgemeiner — eine jedenfalls vorgegebene) Verteilung der Last auf eine Druckfläche voraus, innerhalb der sich die Platte völlig frei deformieren kann. Diese Voraussetzung ist in der Praxis nicht immer erfüllt, so z. B. nicht bei einer rechteckigen Säule in biegungsfester Verbindung mit der Platte, insbesondere auch nicht bei dem Säulenkopf einer Pilzdecke. Mit der in solchen Fällen auftretenden, mehr oder minder vollkommenen Einspannung der Platte in einer rechteckigen Säulenkontur gestaltet sich das gesamte Biegungsproblem erheblich komplizierter und ist nicht mehr auf dem vorhin beschrittenen Wege einer befriedigenden Lösung zuzuführen.

(Eingegangen am 1. Januar 1953.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *S. Woinowsky-Krieger*, Quebec, P. Q. (Canada), 200 av. Marguerite Bourgeoys. Apt. 8.

Beitrag zur Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Schalen.

Von J. Krettner.

1. Einleitung. In einer ersten Mitteilung [1] hat der Verfasser mit Hilfe der Tensorrechnung die allgemeinen Grundformeln der Elastostatik für die schiefwinklige Platte entwickelt. In vorliegender Arbeit sollen die Betrachtungen auf die Theorie der Schalen erweitert werden [2]. Die Verformungsgrößen der Schalenmittelfläche wie der Schale selbst werden wieder, ohne die übliche Betrachtung am Elementarkörper, allein mit den Mitteln der Tensorrechnung hergeleitet und der Verzerrungs- und Deformationstensor der Schale aufgestellt. Auf den Fall der orthogonalen Deformation wurde seiner Bedeutung wegen jeweils besonders eingegangen. Das angeführte Beispiel der Zylinderschale soll den Vorteil des angewandten Verfahrens zeigen.

2. Die unverformte Schalenmittelfläche. Die Mittelfläche einer Schale sei in vektorieller Schreibweise durch $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1, u^2)$ gegeben. Die beiden Parameter u^1, u^2 sind dabei die krummlinigen Koordinaten auf der Fläche mit den Tangentenvektoren $\mathfrak{r}_1 = \partial\mathfrak{r}/\partial u^1 = \mathfrak{r}_1(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{r}_2 = \partial\mathfrak{r}/\partial u^2 = \mathfrak{r}_2(u^1, u^2)$. Der normierte Einheitsvektor im Flächenpunkt $P(u^1, u^2)$ ist dann durch $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2/|\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2| = \mathfrak{n}(u^1, u^2)$ gegeben. Durch Hinzunahme des dritten Vektors $\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{n}(u^1, u^2)$ ist die zweidimensionale tangentielle lokale Basis $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ der Fläche zu einer dreidimensionalen lokalen räumlichen Basis erweitert worden, auf die man jeden dem Flächenpunkt) $P(u^1, u^2)$ zugeordneten Vektor beziehen kann. Man hat somit ein dem Flächenpunkt $P(u^1, u^2)$ zugeordnetes räumliches Koordinatensystem (u^1, u^2, u^3) mit den Einheitsvektoren

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_1|}, \qquad \mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{r}_2}{|\mathfrak{r}_2|}, \qquad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{n} \tag{1}$$

gewonnen. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $I_1 = d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{r} = g_{ik}\, du^i\, du^k$ der Schalenmittelfläche, also die kovarianten Maßzahlen des Einheitstensors der Schalenmittelfläche sind dann

$$g_{ik} = \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{r}_k \qquad (i, k = 1, 2), \qquad g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0, \qquad g_{33} = 1. \tag{2}$$

Setzt man $g = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2$, so ist $\sqrt{g} = |\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2| = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{n})$. Für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform $II_2 = -d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{n} = L_{ik}\, du^i\, du^k$ ist $L_{ik} = -\mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}_k = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}_{ik}$, wenn $\partial\mathfrak{r}_i/\partial u^k = \mathfrak{r}_{ik}$ gesetzt wird, und $L_{i3} = L_3 = 0$ für $i = 1, 2$. Die skalaren Produkte $\mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{n}_k = \nu_{ik}$ sind schließlich die Koeffizienten der dritten Fundamentalform $III_3 = d\mathfrak{n} \cdot d\mathfrak{n} = \nu_{ik}\, du^i\, du^k$. Bildet man nun zu dieser räumlichen krummlinigen Basis $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{n}$ die reziproke Basis

$$\mathfrak{r}^1 = \frac{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{n}}{(\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{n})}, \qquad \mathfrak{r}^2 = \frac{\mathfrak{n} \times \mathfrak{r}_1}{(\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{n})}, \qquad \mathfrak{r}^3 = \frac{\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2}{(\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{n})} = \mathfrak{n},$$

so ist $\mathfrak{r}^i \cdot \mathfrak{r}^k = g^{ik}(i, k = 1, 2)$ und $g^{3i} = g^{i3} = 0\,(i = 1, 2)$ und $g^{33} = 1$. Zwischen den kovarianten und kontravarianten Basisvektoren $\mathfrak{r}_k$ und $\mathfrak{r}^k$ besteht die Beziehung $\mathfrak{r}_k = g_{kn}\, \mathfrak{r}^n$ bzw. $\mathfrak{r}^k = g^{kn}\, \mathfrak{r}_n$. Damit ergibt sich für die kontravarianten Maßzahlen des Einheitstensors der Schalenmittelfläche

$$g^{11} = \frac{1}{g}\, g_{22}, \quad g^{22} = \frac{1}{g}\, g_{11}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{g}\, g_{12}, \quad g^{i3} = g^{3i} = 0\,(i = 1, 2), \quad g^{33} = 1. \tag{3}$$

Setzt man noch $L_i^k = -\mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}^k$, so erhält man für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} L_{in} &= -\mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}_n = -g_{kn}\, \mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}^k = g_{kn}\, L_i^k \\ \text{bzw.} \\ L_i^k &= -\mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}^k = -g^{kn}\, \mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{r}_n = g^{kn}\, L_{in} \text{ mit } L_3^k = L_k^3 = 0\,(k = 1, 2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da $\mathfrak{n}_i = -L_{in}\, \mathfrak{r}^n$ bzw. $\mathfrak{n}_k = -L_k^n\, \mathfrak{r}_n$ ist, ergibt sich ferner für den Zusammenhang der Koeffizienten der zweiten und dritten Fundamentalform der Schalenmittelfläche $r_{ik} = \mathfrak{n}_i \cdot \mathfrak{n}_k =$

[1] *J. Krettner*: Ing.-Arch. 21 (1953) S. 112—118.
[2] Vgl. auch *W. Zerna*: Ing.-Arch. 17 (1949) S. 149 u. 223.

$L_{ik}\,L_k^n$. Ist das Koordinatensystem auf der Mittelfläche der Schale insbesondere orthogonal, so ist noch $g_{12} = g_{21} = 0$, also $g = g_{11}\,g_{22}$ und damit $g^{11} = 1/g_{11}$, $g^{22} = 1/g_{22}$, $g^{33} = 1$ und $g^{12} = g^{21} = 0$. Ferner wird in diesem Falle $\mathfrak{r}_1 = g_{11}\,\mathfrak{r}^1$, $\mathfrak{r}_2 = g_{22}\,\mathfrak{r}^2$, $\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}^3$ und

$$\mathfrak{r}^1 = \frac{1}{g_{11}}\,\mathfrak{r}_1, \qquad \mathfrak{r}^2 = \frac{1}{g_{22}}\,\mathfrak{r}_2, \qquad \mathfrak{r}^3 = \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{n}\,. \tag{5}$$

3. Die verformte Schalenmittelfläche. Der bei einer Verformung zurückgelegte Weg eines Punktes der Schalenmittelfläche sei durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u^1, u^2, u^3)$ gegeben. Die vektorielle Gleichung der verformten Mittelfläche ist somit $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v}$. Die Tangentenvektoren der verformten Mittelfläche sind dann durch $\bar{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{v}_i (i = 1, 2)$ gegeben. Damit ist der normierte Einheitsvektor $\bar{\mathfrak{n}}$ durch $\bar{\mathfrak{r}}_3 = \bar{\mathfrak{n}} = \bar{\mathfrak{r}}_1 \times \bar{\mathfrak{r}}_2 / |\bar{\mathfrak{r}}_1 \times \bar{\mathfrak{r}}_2|$ festgelegt. Die Metrik der verformten Schalenmittelfläche wird $\bar{g}_{ik} = \bar{\mathfrak{r}}_i \cdot \bar{\mathfrak{r}}_k = g_{ik} + \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{v}_k + \mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{v}_k$, $\bar{g}_{i3} = \bar{g}_{3i} = 0$, $\bar{g}_{33} = 1$. Bei Vernachlässigung aller von höherer Ordnung kleinen Größen wird $\bar{g}_{ik} = g_{ik} + \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{v}_k + \mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{v}_i (i, k = 1, 2)$ und man erhält für die Determinante $\bar{g} = \bar{g}_{11}\,\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}^2 = g + 2\,g_{11}(\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{v}_2) + 2\,g_{22}(\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{v}_1) - 2g_{12}(\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{v}_1)$. Da nun $\mathfrak{r}_k = g_{ik}\,\mathfrak{r}^i$ ist, ergibt sich durch Einsetzen und Zusammenfassen $\bar{g} = g\,[1 + 2\,(\mathfrak{r}^i \cdot \mathfrak{v}_i)]$ und damit $\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,[1 - (\mathfrak{r}^i \cdot \mathfrak{v}_i)]$. Es ist $\mathfrak{r}_1 = \sqrt{g}(\mathfrak{r}^2 \times \mathfrak{n})$ und $\mathfrak{r}_2 = \sqrt{g}(\mathfrak{r}^1 \times \mathfrak{n})$, also wird

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{n}} = \frac{\bar{\mathfrak{r}}_1 \times \bar{\mathfrak{r}}_2}{\sqrt{\bar{g}}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\,[\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2] \\ &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\bar{g}}}\left[\mathfrak{n} + (\mathfrak{r}^2 \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{v}_2 - (\mathfrak{r}^1 \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{g}}\,(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2)\right].\end{aligned}$$

Wendet man auf die dreifachen Vektorprodukte den Entwicklungssatz der Vektorrechnung an, und werden die von höherer Ordnung kleinen Glieder wieder vernachlässigt, so erhält man schließlich

$$\bar{\mathfrak{n}} = [1 - \mathfrak{r}^i \cdot \mathfrak{v}_i]\,[\mathfrak{n} + (\mathfrak{r}^i \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{n} - (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{r}^i] = \mathfrak{n} - (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{r}^i = \mathfrak{n} + \mathfrak{w}\,, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{w} = -(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{r}^i = -(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,g^{ik}\,\mathfrak{r}_k = w^k\,\mathfrak{r}_k$ gesetzt wurde.

Ist das Koordinatensystem auf der Mittelfläche der Schale orthogonal, so ist $\bar{g} = g_{11}\,g_{22} + 2\,g_{11}(\mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{v}_2) + 2g_{22}(\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{v}_1)$ und die Koeffizienten des Vektors $\mathfrak{w}$ sind durch $w^1 = -(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_1)/g_{11}$; $w^2 = -(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_2)/g_{22}$ gegeben.

4. Die unverformte Schale. Die Punkte der Schale sollen durch ihren Abstand u^3 von der Mittelfläche der Schale auf der jeweiligen Normalen zur Mittelfläche festgelegt werden. Ist also $P(u^1, u^2)$ ein Punkt der Schalenmittelfläche und $P(u^1, u^2, u^3)$ ein Punkt der Schale auf der Normalen in $P(u^1, u^2)$ zur Mittelfläche, so kann der zum Schalenpunkt $P(u^1, u^2, u^3)$ führende Ortsvektor in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + u^3\,\mathfrak{n}$ angegeben werden. Die Tangentenvektoren im Schalenpunkt $P(u^1, u^2, u^3)$ sind $\mathfrak{x}_i = \partial\mathfrak{x}/\partial u^i = \mathfrak{r}_i + u^3\,\mathfrak{n}_i\,(i = 1, 2)$ und $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{n}$. Bezeichnet man das skalare Produkt der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{x}_k$ mit n_{ik}, so ergibt sich für die Metrik auf der unverformten Schale

$$\left.\begin{aligned} &n_{ik} = g_{ik} - 2\,L_{ik}\,u^3 + \nu_{ik}(u^3)^2\,(i, k = 1, 2)\,, \\ &n_{i3} = n_{3i} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{n} = 0\,(i = 1, 2) \text{ und } n_{33} = \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{n}^2 = 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Der vektorielle Abstand zweier benachbarter Punkte der Schale ist durch $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i\,du^i$ und sein Quadrat durch $(d\mathfrak{x})^2 = n_{ik}\,du^i\,du^k$ gegeben. Damit ist die Metrik der Schale durch die Metrik der Mittelfläche der Schale ausgedrückt.

5. Die verformte Schale. Die Verformung der Schale soll so sein, daß die mitverformten Normalen auch nach der Verformung gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche stehen. Der Ortsvektor $\bar{\mathfrak{x}}$ nach einem Punkt der verformten Schale kann dann bei der Annahme, daß die Änderung von u^3 von höherer Ordnung klein ist, in der Form $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{r}} + u^3\,\bar{\mathfrak{n}}$ angesetzt werden. Die Tangentenvektoren der verformten Schale sind somit $\bar{\mathfrak{x}}_i = \bar{\mathfrak{r}}_i + u^3\,\mathfrak{n}_i\,(i = 1, 2)$ und $\bar{\mathfrak{x}}_3 = \bar{\mathfrak{n}}$. Bezeichnen wir mit $\bar{n}_{ik}$ die metrischen Fundamentalgrößen der verformten Schale, so ist

$$\left.\begin{aligned} &\bar{n}_{ik} = \bar{\mathfrak{x}}_i \cdot \bar{\mathfrak{x}}_k = \bar{g}_{ik} - 2\,\bar{L}_{ik}\,u^3 + \bar{\nu}_{ik}(u^3)^2\,, \\ &\bar{n}_{i3} = \bar{n}_{3i} = \bar{\mathfrak{x}}_3 \cdot \bar{\mathfrak{x}}_i = \bar{\mathfrak{x}}_i \cdot \bar{\mathfrak{x}}_3 = 0, \quad \bar{n}_{33} = \bar{\mathfrak{x}}_3 \cdot \bar{\mathfrak{x}}_3 = \bar{\mathfrak{n}}^2 = 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dabei besteht folgender Zusammenhang zwischen den Fundamentalgrößen der verformten Schale und der Mittelfläche der Schale:

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_{ik} &= \bar{\mathfrak{r}}_i \cdot \bar{\mathfrak{r}}_k = g_{ik} + \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{v}_k + \mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{v}_i , \\ \bar{L}_{ik} &= -\bar{\mathfrak{r}}_i \cdot \bar{\mathfrak{n}}_k = L_{ik} - \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{w}_k - \mathfrak{n}_k \cdot \mathfrak{v}_i = L_{ik} - \mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{w}_k + L_k^n (\mathfrak{r}_n \cdot \mathfrak{v}_i) , \\ \bar{\nu}_{ik} &= \bar{\mathfrak{n}}_i \cdot \bar{\mathfrak{n}}_k = \nu_{ik} - L_i^n (\mathfrak{r}_n \cdot \mathfrak{w}_k) - L_k^n (\mathfrak{r}_n \cdot \mathfrak{w}_i) . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Der vektorielle Abstand zweier benachbarter Punkte der verformten Schale ist durch $d\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}_i \, du^i$ gegeben, das Quadrat des Abstandes ist somit $(d\bar{\mathfrak{x}})^2 = \bar{a}_{ik} \, du^i \, du^k$.

6. Der Verschiebungsvektor eines Schalenpunktes. Der Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ eines Punktes der Mittelfläche der Schale sei in bezug auf das krummlinige Koordinatensystem $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{n}$ in der Form $\mathfrak{v} = v^1 \mathfrak{r}_1 + v^2 \mathfrak{r}_2 + v^3 \mathfrak{n}$ gegeben. Durch die Verschiebung des Punktes $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1, u^2)$ der Mittelfläche der Schale in den Punkt $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v}$ der verformten Mittelfläche geht der Schalenpunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + u^3 \mathfrak{n}$ in den Punkt $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{r}} + u^3 \bar{\mathfrak{n}}$ der verformten Schale über. Da $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} + \mathfrak{w}$ ist, wird $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{r} + \mathfrak{v} + u^3 (\mathfrak{n} + \mathfrak{w}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{v} + u^3 \mathfrak{w}$. Die Verschiebung $\mathfrak{v}'$ des Schalenpunktes $\mathfrak{x}$ ist also durch den Vektor

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + u^3 \mathfrak{w} = \mathfrak{v} - u^3 (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i) \, \mathfrak{r}^i = [v^k - u^3 (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i) \, g^{ik}] \, \mathfrak{r}_k$$

gegeben. Es ist $\mathfrak{v}_i = \dfrac{\partial v^n}{\partial u^i} \mathfrak{r}_n + v^n \mathfrak{r}_{ni}$ und da $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}_n = 0$ bzw. 1 für $n = 1, 2$ bzw. $n = 3$, sowie $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}_i = 0$ ist, ergibt sich für den Verschiebungsvektor

$$\mathfrak{v}' = \left[v^k - u^3 \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^i} + v^n \, L_{ni} \right) g^{ik} \right] \mathfrak{r}_k = v'_k \, \mathfrak{r}_k . \tag{10}$$

Die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{v}'$ des Schalenpunktes $\mathfrak{x}$ sind also durch jene des auf der gleichen Normalen liegenden Punktes $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^1, u^2)$ der Mittelfläche ausgedrückt.

Bezieht man den Verschiebungsvektor noch auf das System der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_k$ des krummlinigen Systems, setzt also $\mathfrak{v} = \bar{v}^k \mathfrak{e}_k$, so gilt zunächst die Beziehung $\bar{v}^k = |\mathfrak{r}_k| \, v^k$, und man erhält

$$\mathfrak{v}' = \bar{v}'^k \mathfrak{e}_k = \left[\bar{v}^k - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^i} + \frac{\bar{v}^n}{|\mathfrak{r}_n|} \, L_{ni} \right) |\mathfrak{r}_k| \, g^{ik} \right] \mathfrak{e}_k .$$

Für die Komponenten des Verschiebungsvektors des Schalenpunktes ergeben sich damit die Werte

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}'^1 &= \bar{v}^1 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^i} + \frac{\bar{v}^n}{|\mathfrak{r}_n|} \, L\,n\,i \right) |\mathfrak{r}_1| \, g^{i1} , \\ \bar{v}'^2 &= \bar{v}^2 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^i} + \frac{\bar{v}^n}{|\mathfrak{r}_n|} \, L\,n\,i \right) |\mathfrak{r}_2| \, g^{i2} , \\ \bar{v}'^3 &= \bar{v}^3 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Man erkennt, daß der Zuwachs linear in u^3 ist und $\bar{v}'^3 = \bar{v}^3$ von u^3 nicht abhängt, also $\partial \bar{v}^3 / \partial u^3 = 0$ ist.

Ist das Koordinatensystem auf der Schalenmittelfläche o r t h o g o n a l, so ist auch $g_{12} = g_{21} = g^{12} = g^{21} = 0$ und man erhält für die Koeffizienten des Verschiebungsvektors in diesem Falle die Werte

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}'^1 &= \bar{v}^1 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} + \frac{\bar{v}^1}{|\mathfrak{r}_1|} \, L_{11} \right) \frac{1}{|\mathfrak{r}_1|} , \\ \bar{v}'^2 &= \bar{v}^2 - u^3 \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u_2} + \frac{\bar{v}_2}{|\mathfrak{r}_2|} \, L_{22} \right) \frac{1}{|\mathfrak{r}^2|} , \\ \bar{v}'^3 &= \bar{v}^3 . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

7. Der Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche. Durch die infinitesimale Deformation geht der Flächenpunkt $P(u^1, u^2)$ der Mittelfläche der Schale in den Punkt $\bar{P}(u^1, u^2)$ der verformten Mittelfläche über. Für den vektoriellen Abstand zweier benachbarter Punkte der verformten Mittelfläche ergibt sich

$$d\bar{\mathfrak{r}} = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r} + \mathfrak{v}_i \, du^i = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{r}^i \, \mathfrak{v}_i) = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{B} ,$$

wenn mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{r}^i \, \mathfrak{v}_i$ der Verzerrungstensor der Mittelfläche bezeichnet wird. Wird nun $d\mathfrak{r} = |d\mathfrak{r}| \, \mathfrak{e}$ gesetzt, so wird $d\bar{\mathfrak{r}} = |d\mathfrak{r}| (\mathfrak{e} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{B})$. Der Abstand selbst ist dann durch den ab-

soluten Betrag

$$|d\bar{\mathfrak{r}}| = |d\mathfrak{r}| \sqrt{(\mathfrak{e} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{B})^2} \approx |d\mathfrak{r}| \left(1 + \mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{B})\right)$$

gegeben. Damit wird die Verzerrung $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ in Richtung $\mathfrak{e}$ gleich

$$\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \frac{|d\bar{\mathfrak{r}}| - |d\mathfrak{r}|}{|d\mathfrak{r}|} = \frac{|d\bar{\mathfrak{r}}|}{|d\mathfrak{r}|} - 1 = \mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{B}). \tag{13}$$

Bekanntlich erhält man nun durch Hinzunahme des konjugierten Tensors $\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{v}_i \mathfrak{r}^i$ den Tensor der reinen Deformation[1] der Mittelfläche durch $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{B}}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{r}^i \mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_i \mathfrak{r}^i)$.

Skalare Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{r}_\sigma$ ergibt den Vektor

$$\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{r}_\sigma \cdot \bar{\mathfrak{B}}) = \frac{1}{2}[\mathfrak{v}_\sigma + (\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{r}^i].$$

Nochmalige skalare Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{r}_\varrho$ gibt die skalare Größe

$$D_{\varrho\sigma} = \mathfrak{r}_\varrho \cdot (\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{2}[(\mathfrak{r}_\varrho \cdot \mathfrak{v}_\sigma) + (\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\varrho)],$$

die für $\varrho = \sigma$ in $D_{\sigma\sigma} = \mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\sigma$ übergeht.

Die Dehnung in Richtung $\mathfrak{e}_\sigma$ ist also durch

$$\varepsilon_{\sigma\sigma} = \mathfrak{e}_\sigma \cdot (\mathfrak{e}_\sigma \cdot D) = \frac{1}{|\mathfrak{r}_\sigma|^2}\,\mathfrak{r}_\sigma \cdot (\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{D}) = \frac{1}{|\mathfrak{r}_\sigma|^2}\,D_{\sigma\sigma} = \frac{1}{|\mathfrak{r}_\sigma|^2}(\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\sigma)$$

gegeben.

Die Winkelausweitung der beiden Vektoren $\mathfrak{r}_\varrho$ und $\mathfrak{r}_\sigma$ erhält man mittels der Formel

$$-\gamma_{\varrho\sigma} = \frac{1}{|\mathfrak{r}_\varrho|\,|\mathfrak{r}_\sigma|}\left[2\,D_{\varrho\sigma} - g_{\varrho\sigma}\left(\frac{D_{\varrho\varrho}}{|\mathfrak{r}_\varrho|^2} + \frac{D_{\sigma\sigma}}{|\mathfrak{r}_\sigma|^2}\right)\right],$$

die im Falle orthogonaler krummliniger Koordinaten auf der Mittelfläche sich zu

$$-\gamma'_{\varrho\sigma} = \frac{2\,D_{\varrho\sigma}}{|\mathfrak{r}_\varrho|\,|\mathfrak{r}_\sigma|}$$

vereinfacht.

Setzt man den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$, auf das krummlinige System bezogen, in der Form $\mathfrak{v} = v^k \mathfrak{r}_k$ an, so ist

$$\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\sigma = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma} g_{k\sigma} + v^k (\mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{r}_{k\sigma})\,(k = 1, 2, 3),$$

und man erhält für den Ausdruck $D_{\varrho\sigma}$, wenn man noch die *Christoffel*symbole $\Gamma_{\sigma k\varrho} = \mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{r}_{k\varrho}$ einführt, den Wert

$$2\,D_{\varrho\sigma} = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma} g_{\varrho k} + \frac{\partial v^k}{\partial u^\varrho} g_{\sigma k} + v^k (\Gamma_{\varrho k\sigma} + \Gamma_{\sigma k\varrho}) - 2v^3 L_{\varrho\sigma}$$

und für $\varrho = \sigma$

$$D_{\sigma\sigma} = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma} g_{k\sigma} + v^k \Gamma_{\sigma k\sigma} - v^3 L_{\sigma\sigma}.$$

Bezieht man den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}$ auf die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_k$ des krummlinigen Systems, so ist $\bar{v}^k = |\mathfrak{r}_k|\,v^k$, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} 2\,D_{\varrho\sigma} &= \frac{1}{|\mathfrak{r}_k|}\left[\frac{\partial \bar{v}^k}{\partial u^\sigma} g_{k\varrho} + \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial u^\varrho} g_{k\sigma}\right] + \frac{\bar{v}^k}{|\mathfrak{r}_k|}\left[\Gamma_{\sigma k\varrho} + \Gamma_{\varrho k\sigma} - \frac{g_{\varrho k}}{|\mathfrak{r}_k|^2}\Gamma_{kk\sigma} - \frac{g_{\sigma k}}{|\mathfrak{r}_k|^2}\Gamma_{kk\varrho}\right] - 2\,\bar{v}^3 L_{\varrho\sigma}, \\ D_{\sigma\sigma} &= \frac{1}{|\mathfrak{r}_k|}\left[\frac{\partial \bar{v}^k}{\partial u^\sigma} g_{k\sigma}\right] + \frac{\bar{v}^k}{|\mathfrak{r}_k|}\left[\Gamma_{\sigma k\varrho} - \frac{g_{k\sigma}}{|\mathfrak{r}_k|^2}\Gamma_{kk\sigma}\right] - \bar{v}^3 L_{\sigma\sigma}. \end{aligned}\right| \tag{14}$$

Im Falle orthogonaler krummliniger Koordinaten ergeben sich die einfacheren Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} 2\,D_{\varrho\sigma} &= |\mathfrak{r}_\varrho|\frac{\partial \bar{v}^\varrho}{\partial u^\sigma} + |\mathfrak{r}_\sigma|\frac{\partial \bar{v}^\sigma}{\partial u^\varrho} + \frac{\bar{v}^k}{|\mathfrak{r}_k|}(\Gamma_{\sigma k\varrho} + \Gamma_{\varrho k\sigma}) - \frac{\bar{v}^\sigma}{|\mathfrak{r}_\sigma|}\Gamma_{\sigma\sigma\varrho}\frac{\bar{v}^\varrho}{|\mathfrak{r}_\varrho|}\Gamma_{\varrho\varrho\sigma} - 2\,\bar{v}^3 L_{\varrho\sigma}, \\ D_{\sigma\sigma} &= |\mathfrak{r}_\sigma|\frac{\partial \bar{v}^\sigma}{\partial u^\sigma} + \frac{\bar{v}^k}{|\mathfrak{r}_k|}\Gamma_{\sigma k\sigma} - \frac{\bar{v}^\sigma}{|\mathfrak{r}_\sigma|}\Gamma_{\sigma\sigma\sigma} - \bar{v}^3 L_{\sigma\sigma}. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

[1] Vgl. *F. Ollendorf*: Die Welt der Vektoren, S. 208. Wien, 1950.

8. DerVerzerrungstensor der Schale. Durch die infinitesimale Verschiebung geht der Schalenpunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{r} + u^3\,\mathfrak{n}$ in den Punkt $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{r}} + u^3\,\bar{\mathfrak{n}}$ der verformten Schale über. Für den vektoriellen Abstand zweier benachbarter Punkte der verformten Schale erhält man

$$d\bar{\mathfrak{x}} = d\bar{\mathfrak{r}} + u^3\,d\bar{\mathfrak{n}} + \bar{\mathfrak{n}}\,du^3 = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{v} + u^3\,(d\mathfrak{n} + d\mathfrak{w}) + \mathfrak{n}'\,du^3 + \mathfrak{w}\,du^3.$$

Nun ist $d\mathfrak{x} = d\mathfrak{r} + u^3\,d\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\,du^3$, also $d\bar{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x} + d\mathfrak{v} + u^3\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\,du^3$ oder $d\mathfrak{x} = \mathfrak{v}_i\,du^i + u^3\,\mathfrak{w}_i\,du^i + \mathfrak{w}\,du^3$. Da $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i\,du^i$, also $\mathfrak{x}^i \cdot d\mathfrak{x} = du^i$ ist, wobei die $\mathfrak{x}^i$ die reziproken Vektoren der $\mathfrak{x}_i$ sind, erhält man schließlich

$$d\bar{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{x}^i\,\mathfrak{v}_i + u^3\,\mathfrak{x}^i\,\mathfrak{w}_i + \mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w}]\,.$$

Setzt man $\mathfrak{V} = \mathfrak{x}^i\,\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{x}^i\,\mathfrak{w}_i$ und $d\mathfrak{x} = |d\mathfrak{x}|\,\mathfrak{e}$, so wird

$$d\bar{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{e} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{V} + u^3\,\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{W} + (\mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w}) \cdot \mathfrak{e}]$$

und damit der absolute Betrag

$$|d\bar{\mathfrak{x}}| = |d\mathfrak{x}| \cdot \sqrt{1 + 2\,\mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{V}) + u^3\,2\,\mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{W}) + 2\,\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w})} = |d\mathfrak{x}| \begin{bmatrix} 1 + \mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{V}) \\ + u^3\,\mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{W}) \\ + \mathfrak{e} \cdot [\mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w})] \end{bmatrix}.$$

Die Dehnung in Richtung $\mathfrak{e}$ ist somit

$$\varepsilon'_{\mathfrak{e}} = \frac{|d\bar{\mathfrak{x}}| - |d\mathfrak{x}|}{|d\mathfrak{x}|} = \frac{|d\bar{\mathfrak{x}}|}{|d\mathfrak{x}|} - 1 = \mathfrak{e} \cdot (\mathfrak{e} \cdot \boldsymbol{\Phi}).$$

Dabei ist $\boldsymbol{\Phi} = \mathfrak{V} + u^3\,\mathfrak{W} + \mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w}$ der Tensor der Verzerrung der Schale.

Wie im Falle der Schalenmittelfläche erhält man durch Hinzunahme des konjugierten Tensors $\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \bar{\mathfrak{V}} + u^3\,\bar{\mathfrak{W}} + \mathfrak{w}\,\mathfrak{x}^3$ den Tensor $\mathfrak{D}'$ der reinen Deformation der Schale zu

$$\mathfrak{D}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} + \bar{\boldsymbol{\Phi}}) = \frac{1}{2}[\mathfrak{V} + \bar{\mathfrak{V}} + u^3\,(\bar{\mathfrak{W}} + \mathfrak{W}) + \mathfrak{x}^3\,\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\,\mathfrak{x}^3]\,. \tag{16}$$

Die Komponenten des Tensors sind also

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_{\sigma\sigma} &= \mathfrak{e}_\sigma \cdot (\mathfrak{e}_\sigma \cdot \mathfrak{D}') = \frac{1}{|\mathfrak{x}_\sigma|^2}\,(\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{D}') = \frac{1}{|\mathfrak{x}_\sigma|^2}\,D'_{\sigma\sigma}\,, \\ -\gamma'_{\varrho\sigma} &= \frac{1}{|\mathfrak{x}_\sigma|\,|\mathfrak{x}_\varrho|}\left[2\,D'_{\varrho\sigma} - n_{\varrho\sigma}\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}_\sigma|^2}\,D'_{\sigma\sigma} + \frac{1}{|\mathfrak{x}_\varrho|^2}\,D'_{\varrho\varrho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ist das Koordinatensystem auf der Schale selbst noch orthogonal, ist also $n_{\varrho\sigma} = 0$, für $\varrho \neq \sigma$, so vereinfacht sich $\gamma'_{\varrho\sigma}$ zu $-\gamma'_{\varrho\sigma} = \frac{1}{|\mathfrak{x}_\sigma|\,|\mathfrak{x}_\sigma|} \cdot 2\,D'_{\varrho\sigma}$. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} 2\,D'_{\varrho\sigma} &= \mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\varrho + \mathfrak{x}_\varrho \cdot \mathfrak{v}_\sigma + u^3\,(\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{w}_\varrho + \mathfrak{x}_\varrho \cdot \mathfrak{w}_\sigma) + (\mathfrak{x}_\varrho \cdot \mathfrak{x}^3)\,(\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{w}) + (\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{x}^3)\,(\mathfrak{x}_\varrho \cdot \mathfrak{w})\,, \\ D'_{\sigma\sigma} &= \mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{v}_\sigma + u^3\,\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{w}_\sigma + (\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{x}^3)\,(\mathfrak{x}_\sigma \cdot \mathfrak{w})\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Da nun $\mathfrak{w} = -\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,g^{ik}\,\mathfrak{r}_k$ ist, wird $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w} = -\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,g^{i3} = -\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_3) = -\,\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^3} = 0$ und somit $\mathfrak{n}_k \cdot \mathfrak{w} + \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}_k = 0$ $(k = 1, 2)$. Ferner ist $\mathfrak{r}_k \cdot \mathfrak{w} = w^i\,g_{ik}\,(i, k = 1, 2)$ und $w^3 = 0$, also auch $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}_3 = 0$. Die obigen Formeln ergeben somit

$$\left.\begin{aligned} D'_{11} &= \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 + u^3\,\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{w}_1\,, \\ D'_{22} &= \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{v}_2 + u^3\,\mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{w}_2\,, \\ D'_{33} &= \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{v}_3 + u^3\,\mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{w}_3 + \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{w} = (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_3) + u^3\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}_3) + (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Mit $D'_{33} = 0$ ist aber auch $\varepsilon'_{33} = 0$, d. h. die Dehnung der Schale in Richtung der Normalen ist Null. Ferner wird

$$\left.\begin{aligned} 2\,D'_{12} &= \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 + u^3\,(\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{w}_1) = 2\,D'_{21}\,, \\ 2\,D'_{13} &= \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{v}_3 + u^3\,(\mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{w}_3) + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{w} \\ &= \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_1 + u^3\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{w}) + \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{w} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_1 + g_{11}\,\mathfrak{w}^1 + g_{12}\,w^2 = 2\,D'_{31}\,, \\ 2\,D'_{23} &= \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{v}_3 + u^3\,(\mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{w}_3) + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{w} \\ &= \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_2 + u^3\,(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{w}) + \mathfrak{r}_2 \cdot \mathfrak{w} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_2 + g_{12}\,\mathfrak{w}^1 + g_{22}\,w^2 = 2\,D'_{32}\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ist das Koordinatensystem auf der Mittelfläche der Schale o r t h o g o n a l , so wird

$$\left.\begin{aligned} 2\,D'_{13} &= \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_1 + g_{11}\,\mathfrak{w}^1 = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_1 - g_{11}(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_1)\,g^{11} = 0,\\ 2\,D'_{23} &= \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_2 + g_{22}\,\mathfrak{w}^2 = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_2 - g_{22}(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_2)\,g^{22} = 0, \text{ also } \gamma'_{13} = \gamma'_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

es tritt somit keine Winkeländerung zwischen Normale und Parallele zur Mittelfläche ein.

Im Falle eines krummlinigen, aber orthogonalen Koordinatensystems auf der Schalenmittelfläche werden also drei der sechs Deformationskomponenten Null, die übrigen drei bestimmen somit einen ebenen Deformationszustand.

Ist das Koordinatensystem auf der Schale auch o r t h o g o n a l , so folgt aus $(d\mathfrak{x})^2 = n_{ik}\,du^i\,du^k$, daß $n_{ik} = \mathfrak{x}_i\cdot\mathfrak{x}_k = g_{ik} - 2\,L_{ik}u^3 + \nu_{ik}(u^3)^2 = 0\ (i \neq k)$ sein muß, was neben g_{ik} auch $L_{ik} = L_{ki} = 0$ und $\nu_{ik} = \nu_{ki} = 0$ ergibt.

In diesem Falle sind also alle L_{ik} und ν_{ik} und damit auch alle L^k_i für $i \neq k$ gleich Null. Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 &= -L_{11}\,\mathfrak{r}^1 = -L^1_1\,\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{n}_2 = -L_{22}\,\mathfrak{r}^2 = -L^2_2\,\mathfrak{r}_2,\\ \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{r}_1 + u_3\,\mathfrak{n}_1 = (1 - u^3\,L^1_1)\,\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{r}_2 + u^3\,\mathfrak{n}_2 = (1 - u^3\,L^2_2)\,\mathfrak{r}_2,\\ D'_{11} &= (1 - u^3\,L^1_1)\,(\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{v}_1 + u^3\,\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{w}_1),\\ D'_{22} &= (1 - u^3\,L^2_2)\,(\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{v}_2 + u^3\,\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{w}_2),\\ 2\,D'_{12} &= (1 - u^3\,L^1_1)\,(\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{v}_2 + u^3\,\mathfrak{r}_1\cdot\mathfrak{w}_2) + (1 - u^3\,L^2_2)\,(\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{v}_1 + u^3\,\mathfrak{r}_2\cdot\mathfrak{w}_1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

9. Anwendung auf die Zylinderschale. Zeigt die Achse des Zylinders in Richtung der x^3-Achse, so ist die Mittelfläche der Zylinderschale in Parameterform gegeben durch

$$x^1 = a\cos\varphi, \quad x^2 = a\sin\varphi, \quad x^3 = z.$$

Sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren des zugrunde gelegten rechtwinkligen Systems, so erhält man für den zu einem Punkt P der Schalenmittelfläche führenden Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x^1\,\mathfrak{i} + x^2\,\mathfrak{j} + x^3\,\mathfrak{k} = (a\cos\varphi)\,i + (a\sin\varphi)\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}.$$

Die Tangentenvektoren sind $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_\varphi = a\,(-\sin\varphi\,\mathfrak{i} + \cos\varphi\,\mathfrak{j})$ und $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_z = \mathfrak{k}$, der normierte Einheitsvektor im Flächenpunkt ist $\mathfrak{n} = \cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j}$. Die Ausdrücke (2) und (3) ergeben im Falle der Zylinderschale

$$\begin{aligned} &g_{11} = a^2, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0,\\ &g^{11} = 1/a^2, \quad g^{22} = g^{33} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = g^{13} = g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß das Koordinatensystem auf der Mittelfläche der Schale orthogonal ist. Nach (4) ist

$$\begin{aligned} &L_{11} = -a, \quad L_{12} = L_{21} = L_{22} = r_{12} = r_{21} = 0,\\ &L^1_1 = -\frac{1}{a}, \quad L^2_2 = L^1_2 = L^2_2 = 0, \end{aligned}$$

also ist auch das Koordinatensystem auf der Schale selbst orthogonal. Bildet man nun die Ableitungen der Basisvektoren

$$\mathfrak{r}_{11} = -a\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{r}_{21} = \mathfrak{r}_{22} = \mathfrak{r}_{23} = \mathfrak{r}_{32} = 0, \quad \mathfrak{r}_{31} = \mathfrak{n}_1 = \frac{r_1}{a},$$

$$\mathfrak{r}^1_1 = \frac{r_{11}}{a^2}, \quad \mathfrak{r}^2_1 = \mathfrak{r}_{21} = 0, \quad \mathfrak{r}^3_1 = \mathfrak{r}_{31} = \mathfrak{n}_1,$$

so erhält man für die Verschiebungskomponenten des Schalenpunktes nach (12)

$$\bar v'^1 = \bar v^1 + \left(\bar v^1 - \frac{\partial \bar v^3}{\partial u^1}\right)\frac{u^3}{a}, \qquad \bar v'^2 = \bar v^2 - \frac{\partial \bar v^3}{\partial u^2}, \qquad \bar v^{3\prime} = \bar v^3.$$

Da

$$\mathfrak{v}_i = \frac{\partial v^1}{\partial u^i}\,\mathfrak{r}_1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^i}\,\mathfrak{r}_2 + \frac{\partial v^3}{\partial u^i}\,\mathfrak{r}_3 + v^1\,\mathfrak{r}_{1i} + v^2\,\mathfrak{r}_{2i} + v^3\,\mathfrak{n}_i,$$

also

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_1 = -\bar v^1 + \frac{\partial \bar v^3}{\partial u^1}, \qquad \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}_2 = \frac{\partial \bar v^3}{\partial u^2}$$

ist, wird mit $\mathfrak{x}_1 = \left(1 + \frac{u^3}{a}\right)\mathfrak{r}^1$, $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{n}$

$$\mathfrak{x}_1\cdot\mathfrak{v}_1 = a\left(1 + \frac{u^3}{a}\right)\left(\frac{\partial \bar v^1}{\partial u^1} + \bar v^3\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{v}_2 = \frac{\partial \bar v^2}{\partial u^2}.$$

Mit $\mathfrak{w} = -(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v}_i)\,\mathfrak{r}^i$, also

$$\mathfrak{w}_1 = \left(\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^2} - \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1}\right)\mathfrak{r}^1 + \left(\frac{\partial \bar{v}^3}{\partial u^1} - \bar{v}^1\right)\mathfrak{n} - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1\,\partial u^2}\,\mathfrak{r}^2$$

und

$$\mathfrak{w}_2 = -\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{22}}\,\mathfrak{r}^2$$

erhält man ferner

$$\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{w}_1 = \left(1 + \frac{u^3}{a}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{12}} - \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1}\right), \quad \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{w}_2 = -\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{22}}\,.$$

Damit drücken sich die Deformationskomponenten der Schale durch die Verschiebungen der Mittelfläche der Schale nach (17) u. (18) folgendermaßen aus:

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{\varphi} = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} + \frac{1}{a + u^3}\bar{v}^3 - \frac{u^3}{a\,(a + u^3)}\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{12}}\,,$$

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{z} = \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{22}}\,u^3,$$

$$-\gamma'_{12} = -\gamma'_{\varphi z} = \frac{a + u^3}{a}\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} + \frac{1}{u + u^3}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} - \left(\frac{u^3}{a} + \frac{u^3}{a + u^3}\right)\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1\,\partial u^2}\,.$$

Setzt man $\bar{v}^1 = v$, $\bar{v}^2 = u$ und $\bar{v}^3 = w$, so stimmen die Ergebnisse mit denen z. B. von *Girkmann*[1] auf die übliche Weise hergeleiteten Beziehungen überein. Für $u^3 = 0$ erhält man ferner unmittelbar die Deformationskomponenten der Mittelfläche der Schale:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1} + \bar{v}^3\right), \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{z} = \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2}\,,$$

$$-\gamma_{12} = -\gamma_{\varphi z} = \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1}\,.$$

Entwickelt und ordnet man nach Potenzen von u^3/a, so erhält man bei Berücksichtigung der quadratischen Glieder

$$\varepsilon'_{\varphi} = L_{\varphi} + M_{\varphi}\frac{u^3}{a} + N_{\varphi}\left(\frac{u^3}{a}\right)^2,$$

$$\varepsilon'_{z} = L_{z} + M_{z}\frac{u^3}{a} + N_{z}\left(\frac{u^3}{a}\right)^2,$$

$$-\gamma'_{\varphi z} = A - B\frac{u^3}{a} + C\left(\frac{u^3}{a}\right)^2,$$

wobei die Größen

$$L_z = \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^2}\,, \quad M_z = -a\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{22}}\,, \quad N_z = 0\,,$$

$$L_{\varphi} = \frac{1}{a}\left(\bar{v}^3 + \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^1}\right), \quad M_{\varphi} = -\frac{1}{a}\left(\bar{v}^3 + \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{12}}\right), \quad N_{\varphi} = \frac{1}{a}\left(\bar{v}^3 + \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^{12}}\right),$$

$$A = \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1}\,, \quad B = \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial u^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} + 2\frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1\,\partial u^2}\,, \quad C = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial u^1} + \frac{\partial^2 \bar{v}^3}{\partial u^1\,\partial u^2}$$

bis auf die Bezeichnung mit denen von *Hencky*[2] angegebenen übereinstimmen.

In einer folgenden Arbeit soll auf einige Sonderfälle der Schalentheorie eingegangen werden.

(Eingegangen am 16. Februar 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *J. Krettner*, München 13, Gentzstraße 5.

---

[1] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 388 und 329, Wien 1948.
[2] *H. Hencky*, Neuere Verfahren der Festigkeitslehre, München 1951.

Berechnung der spezifischen inneren Oberfläche poröser Körper.

Von **A. Dahme.**

1. Einleitung. *Weidenhammer*[1] und *Matz*[2] berechneten die äußere Oberfläche eines körnigen Gutes für richtungsisotrope Körner und für diejenige spezielle Verteilungsfunktion des Korndurchmessers, die sich aus den empirisch gefundenen Siebdurchgangskurven von *Rosin-Rammler*[3] ergibt. In der folgenden Arbeit soll das umgekehrte Problem behandelt werden, die Berechnung der inneren Oberfläche eines porösen Körpers. Diese Oberfläche ist bei vielen physikalischen und chemisch-technischen Vorgängen, z. B. für Adsorptionseigenschaften, katalytische Wirkungen, Reaktionsvermögen usw., ein wichtiger Parameter. Selbstverständlich läßt sich auch dieses Problem nicht in voller Allgemeinheit behandeln; vielmehr müssen gewisse Annahmen über die Form der Poren und die Art der Verteilungsfunktion gemacht werden.

2. Kugelporen. Es sei zunächst angenommen, daß die Poren richtungsisotrop sind, so daß die Kugel eine brauchbare Näherung darstellt. Ist $f(x)$ die Verteilungsfunktion für die Porendurchmesser (Abb. 1), so gilt für die Zahl dn der Poren, die einen Durchmesser zwischen x und $x + dx$ haben

$$dn = n_0 f(x)\, dx\,, \tag{1}$$

wobei n_0 die Gesamtzahl der vorhandenen Poren ist.

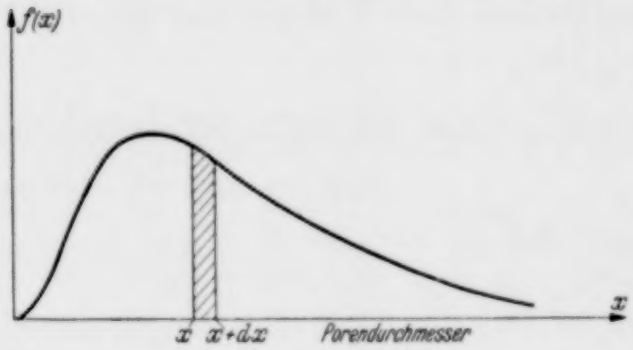


Abb. 1. Porenverteilungskurve.

Oberfläche und Volumen der auf den Streifen zwischen den Ordinaten x und $x + dx$ entfallenden Kugelporen sind gegeben durch

$$dO = \pi x^2\, dn = n_0 \pi\, x^2 f(x)\, dx\,, \tag{2a}$$

$$dV = \frac{1}{6}\pi\, x^3\, dn = n_0 \frac{\pi}{6}\, x^3 f(x)\, dx. \tag{2b}$$

Um die gesamte Porenoberfläche O und das gesamte Porenvolumen V zu erhalten, muß über alle Werte von x integriert werden. Der Zusammenhang zwischen der analytischen Form der Verteilungsfunktion und den praktisch gegebenen Verhältnissen wird darüber entscheiden, ob die untere Grenze Null sein kann oder ob ein fester kleinster Porendurchmesser x_{min} als untere Grenze eingesetzt werden muß. Die obere Grenze kann wohl in jedem Falle bis zu $x = \infty$ erstreckt werden. Es sind daher

$$O = n_0 \pi \int_{x_{min}}^{\infty} x^2 f(x)\, dx\,, \tag{3a}$$

$$V = n_0 \frac{\pi}{6} \int_{x_{min}}^{\infty} x^3 f(x)\, dx\,. \tag{3b}$$

Die Gesamtzahl der Poren n_0 ist im allgemeinen unbekannt. Jedoch läßt sich das Porenvolumen V in fast allen Fällen bequem messen, etwa durch die Bestimmung der scheinbaren Dichte $\varrho' = G_0/V_0$ und der wahren Dichte $\varrho = G_0/(V_0 - V)$. Hierin bezeichnet V_0 das Gesamtvolumen des Körpers und G_0 sein Gewicht. Für die Porosität p (Verhältnis Porenvolumen V zu Gesamtvolumen V_0) gilt dann

$$p = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{V_0 - V}{V_0} = 1 - \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho} \tag{4}$$

und weiterhin

$$V_0 = \frac{V}{p}\,, \tag{5a}$$

[1] *F. Weidenhammer*: TIZ-Zbl. 75 (1951) 133.
[2] *G. Matz*: Ing.-Arch. 20 (1952) 19.
[3] S. z. B. *P. Rosin, E. Rammler, K. Sperling*: Bericht C 52 des Reichskohlenrates 1933.

$$G_0 = \varrho\,(V_0 - V) = \varrho\,\frac{1-p}{p}\,V\,. \tag{5b}$$

Aus (3a), (5b) und (3b) ergibt sich so die gesuchte spezifische innere Oberfläche (Oberfläche je Gewichtseinheit) zu

$$\frac{O}{G_0} = \frac{6}{\varrho}\,\frac{p}{1-p}\,\frac{\int_{x_{min}}^{\infty} f(x)\,x^2\,dx}{\int_{x_{min}}^{\infty} f(x)\,x^3\,dx}\,. \tag{6}$$

Die Porenverteilungskurve kann eine beliebige empirisch gegebene Funktion sein. Da jedoch dann für jeden Fall die Integration erneut durchgeführt werden muß, ist es vorteilhafter, die empirisch gegebene Verteilungsfunktion durch einen analytischen Ausdruck anzunähern und die Integrale als Funktion der Parameter dieser analytischen Funktion zu berechnen. So braucht sich die wiederkehrende Arbeit nur auf die Bestimmung dieser Parameter zu beschränken. Im folgenden werden für zwei Verteilungsfunktionen die Rechnungen explizit durchgeführt: Für die Normalverteilung erster und zweiter Art[1].

a) Normalverteilung erster Art (*Gaußsche Verteilung*). In diesem Falle lautet der analytische Ausdruck für die Verteilungsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{s}\right)^2}\,. \tag{7}$$

M ist dabei der Medianwert (der hier mit dem Mittelwert und dem häufigsten Wert zusammenfällt), s die Streuung. Beide Werte können am einfachsten der Summenkurve (dargestellt als Gerade im Wahrscheinlichkeitsnetz) entnommen werden. M ist der Abszissenwert für die Summenhäufigkeit 50%, $s = (x_2 - x_1)/\sqrt{2\pi}$, wenn x_2 und x_1 die Abszissenwerte für die Summenhäufigkeit 89,5% und 10,5% sind (Abb. 2). Setzt man (7) in (6) ein, substituiert

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x-M}{s} = \xi \tag{8}$$

und setzt

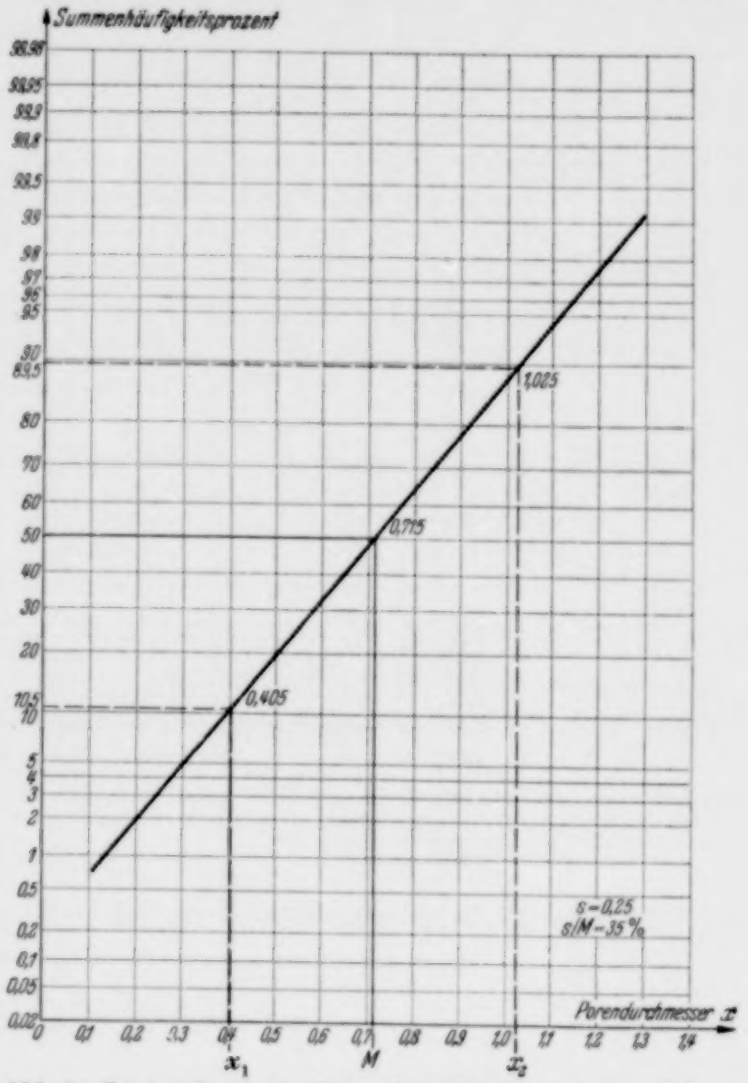


Abb. 2. Summenkurve der Normalverteilung 1. Art, dargestellt im linearen Wahrscheinlichkeitsnetz.

$$\frac{\sqrt{2}\,s}{M} \equiv a\,, \tag{9}$$

so wird $x = M(1 + a\,\xi)$, und man erhält für die spezifische innere Oberfläche

$$\frac{O}{G_0} = \frac{6}{\varrho}\,\frac{p}{1-p}\,\frac{H(a)}{M}\,, \tag{10}$$

wobei die Funktion $H(a)$ den Quotienten

$$H(a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + a\,\xi)^2\,e^{-\xi^2}\,d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + a\,\xi)^3\,e^{-\xi^2}\,d\xi} \tag{11}$$

[1] Über die Eigenschaften dieser Normalverteilungen s. z. B. *H. Gebelein* u. *H.-J. Heite*: Statistische Urteilsbildung, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951.

darstellt. Diese Funktion gilt es zu berechnen; dabei ist für die untere Grenze noch die folgende Überlegung anzustellen. In der Ausgangsgleichung (6) wurde sie gleich x_{min} gesetzt, nach der Substitution ist sie gegeben durch $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{(x_{min}-M)}{s}$. Hier sei nun angenommen, daß die empirisch ermittelte Porenverteilung auch zu kleinsten Werten hin durch die *Gauß*sche Verteilung erfüllt wird, so daß also $x_{min}=0$ gesetzt werden kann. Da jedoch für den Porendurchmesser Null in allen praktischen Fällen die Wahrscheinlichkeit verschwinden muß, kann die untere Grenze, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, bis zu $-\infty$ erstreckt werden.

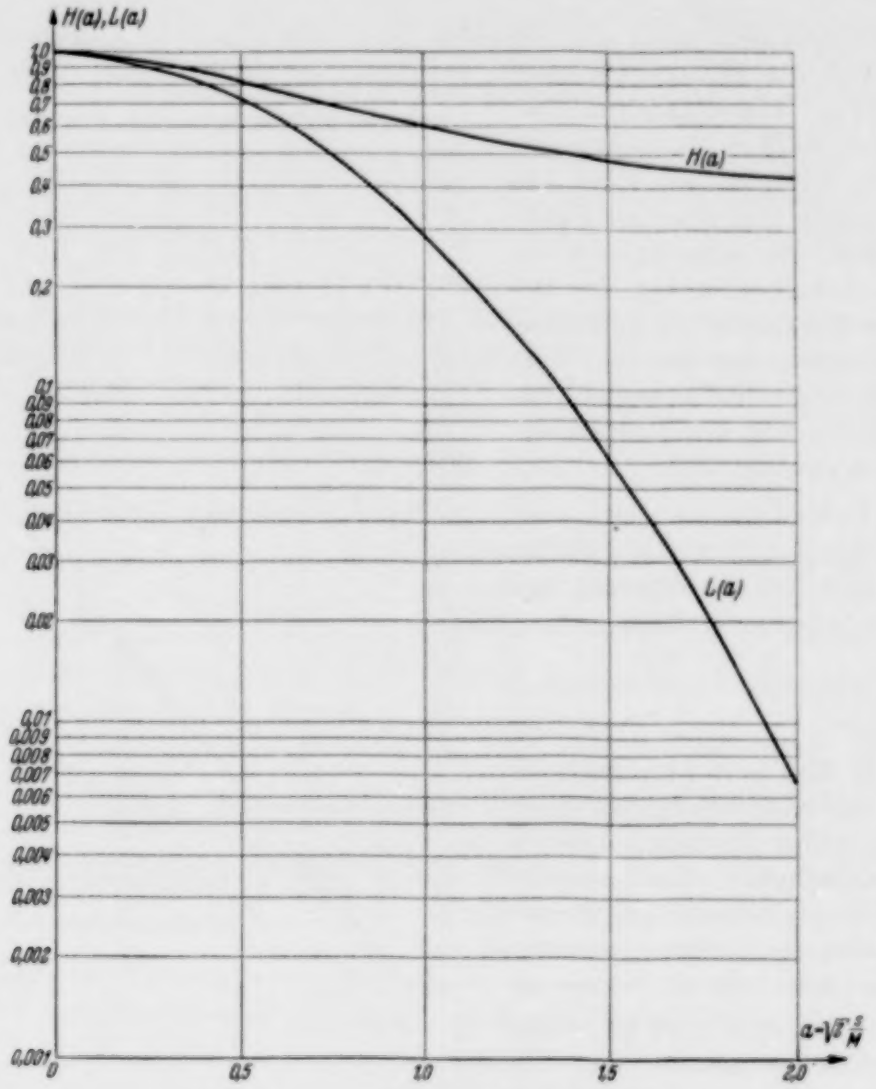


Abb. 3. Die Funktionen $H(a)$ und $L(a)$.

Die Funktion läßt sich nun elementar auswerten. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2}\, dx$$

und den expliziten Werten für $n=0$ und $n=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}\, dx = 0$$

errechnet sich $H(a)$ zu

$$H(a) = \frac{a^2+2}{3a^2+2}\,. \tag{12}$$

Diese Funktion ist in Abb. 3 graphisch dargestellt.

b) Normalverteilung zweiter Art. Die praktische Auszählung der Porenverteilungskurven ergab, daß in den wenigsten Fällen eine Normalverteilung erster Art vor-

liegt, daß jedoch in der großen Mehrzahl aller untersuchten porösen Körper die Porenverteilungskurve durch eine Normalverteilung zweiter Art, deren Fluchtpunkt im Nullpunkt liegt, gut wiedergegeben wird. Man erkennt diesen Sachverhalt leicht, wenn man aus der gemessenen Porenverteilungskurve die Summenkurve bildet und die so aufbereiteten Meßpunkte in ein logarithmisches Wahrscheinlichkeitsnetz einträgt. Sie liegen dann in den meisten Fällen auf einer Geraden. Tabelle 1 und Abb. 4 geben zur Erläuterung die gemessenen Werte für die Porenverteilung eines Kokses wieder.

Tabelle 1. *Empirisch ermittelte Porenverteilungskurve eines Kokses.*

Porendurchmesser mm	Porenzahl	Summenkurve absolut	Summenkurve relativ
<0,02	57	57	6,4%
0,02—0,05	273	330	37,4%
0,05—0,10	316	646	73,5%
0,10—0,20	176	822	93,5%
0,20—0,50	56	878	99,7%
>0,50	3	881	100 %

Der analytische Ausdruck für diese Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{M}{s\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\left(\frac{\ln(x/M)}{\sqrt{2}(s/M)}\right)^2}}{x}\,; \qquad (13)$$

M und s sind wieder Medianwert (der jetzt nicht mit häufigstem Wert und Mittelwert übereinstimmt) und Streuung. Die relative Streuung s/M kann unmittelbar der Summenkurve entnommen werden. Sie ist

$$\frac{s}{M} = \log \frac{x_2}{x_1}\,, \qquad (14)$$

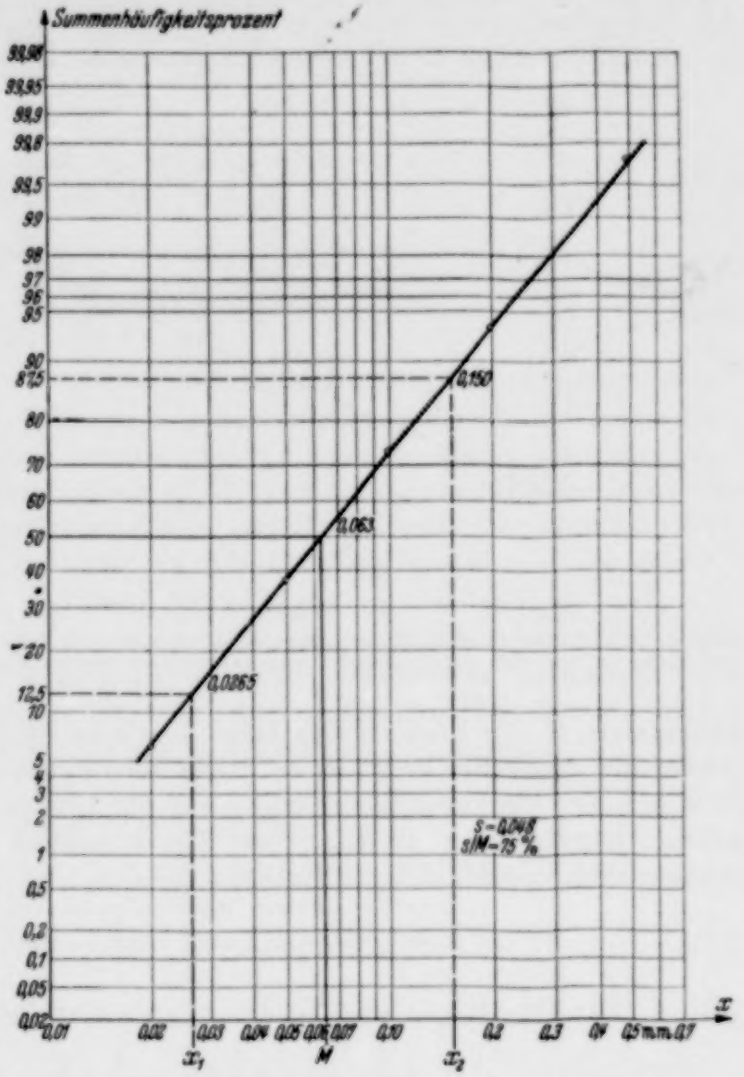


Abb. 4. Summenkurve für die Porenverteilung eines Kokses (Normalverteilung 2. Art), dargestellt im logarithmischen Wahrscheinlichkeitsnetz.

wobei x_2 und x_1 diejenigen Abszissenwerte sind, die zu den Ordinaten 87,5% und 12,5% gehören (Abb. 4). Setzt man (13) in (6) ein, substituiert

$$\xi = \frac{\ln(x/M)}{\sqrt{2}(s/M)}\,, \qquad (15)$$

benutzt die Identität (9) und setzt als untere Grenze Null ein, so erhält man

$$\frac{O}{G_0} = \frac{6}{\varrho} \frac{p}{1-p} \frac{L(a)}{M} \qquad (16)$$

mit

$$L(a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} e^{2a\xi}\, d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} e^{3a\xi}\, d\xi}\,. \qquad (17)$$

Die Funktion $L(a)$ läßt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Die Integranden wurden daher berechnet, die zugehörigen Kurven gezeichnet und planimetriert. Tabelle 2 und Abb. 3 geben das Ergebnis dieser graphischen Ermittlung wieder.

Tabelle 2. *Die Funktion $L(a)$.*

a	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$L(a)$	1	0,730	0,284	0,0603	0,00660

3. Schlauchporen. Es werde nunmehr der einfachste richtungsanisotrope Fall betrachtet: Die Poren seien in einer Richtung länger als in den beiden anderen Koordinatenrichtungen, so daß der Kreiszylinder eine befriedigende Näherung an die wahre Gestalt der Poren darstellt. Es sind jedoch noch weitere sehr einschneidende Voraussetzungen zu machen, um zu brauchbaren numerischen Ergebnissen zu kommen. Ist x die Höhe des Zylinders, y der Basisdurchmesser, so stellen die zusammengehörenden Wertepaare (x, y) eine „Punktwolke" in der (x, y)-Ebene dar (Abb. 5). Die Verteilung dieser Punktwolke ist im allgemeinen unbekannt. Bekannt sind jedoch häufig die Verteilungsfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ für Länge und Durchmesser der Poren. Diese hängen mit der unbekannten Verteilungsfläche der Punktwolke $f(x, y)$ durch die Integralgleichungen

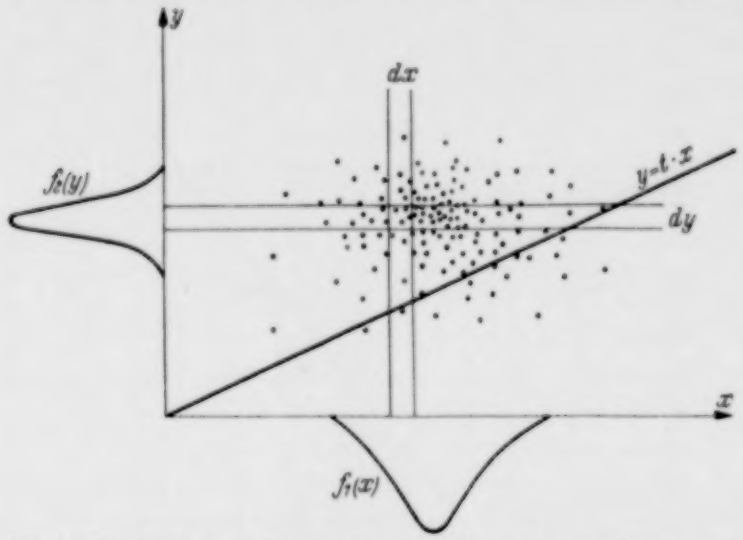


Abb. 5. Verteilung zusammengehörender Werte für Durchmesser (y) und Höhe (x) der durch Kreiszylinder angenähert dargestellten Poren.

$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x, y)\, dy, \tag{18a}$$

$$f_2(y) = \int_0^\infty f(x, y)\, dx \tag{18b}$$

zusammen, deren Lösung hier nicht versucht werden soll. Vielmehr wird die einschränkende Annahme gemacht, daß ein so enger Korrelationszusammenhang zwischen x und y besteht, daß sich die Punktwolke praktisch auf die Gerade $y = tx$ zusammenzieht, d. h. daß das Verhältnis Durchmesser zu Länge der Poren nahezu konstant ist. Ohne Überschreitung des zulässigen Fehlers soll also die Relation

$$\frac{x}{y} = t \tag{19}$$

gelten. Für Oberfläche und Volumen eines einzelnen Zylinders erhält man dann

$$o = \pi y \left(x + \frac{1}{2} y\right) = \pi t \left(1 + \frac{1}{2} t\right) x^2, \tag{20a}$$

$$v = \frac{\pi}{4} x y^2 = \frac{\pi}{4} t x^3 \tag{20b}$$

und für Oberfläche und Volumen aller Zylinder im Intervall dx

$$dO = n_0 \pi t \left(1 + \frac{1}{2} t\right) x^2 f(x)\, dx, \tag{21a}$$

$$dV = n_0 \frac{\pi}{4} t^2 x^3 f(x)\, dx. \tag{21b}$$

Hieraus folgen durch Integration wieder Gesamtporenoberfläche und -volumen

$$O = n_0 \pi t \left(1 + \frac{1}{2} t\right) \int_{x_{min}}^\infty x^2 f(x)\, dx, \tag{22a}$$

$$V = n_0 \frac{\pi}{4} t^2 \int_{x_{min}}^\infty x^3 f(x)\, dx \tag{22b}$$

und schließlich die spezifische innere Oberfläche

$$\frac{O}{G_0} = \frac{2}{\varrho} \frac{p}{1-p} \frac{2+t}{t} \frac{\int_{x_{min}}^\infty x^2 f(x)\, dx}{\int_{x_{min}}^\infty x^3 f(x)\, dx}. \tag{23}$$

Es seien M_x der Medianwert der Verteilung $f_1(x)$, M_y derjenige der Verteilung $f_2(y)$, dann muß nach Voraussetzung auch das Wertpaar (M_x, M_y) auf der Geraden $y = tx$ liegen. Die Größe t kann also durch den Quotienten M_y/M_x ersetzt werden. Für $f(x)$ ist die zutreffende Verteilung einzusetzen. Da die Rechnung derjenigen für Kugelporen analog läuft, sei hier nur das Ergebnis mitgeteilt:

a) Normalverteilung erster Art.

$$\frac{O}{G_0} = \frac{2}{\varrho}\,\frac{p}{1-p}\,\frac{2\,M_x + M_y}{M_x\,M_y}\,H(a)\,. \tag{24}$$

b) Normalverteilung zweiter Art.

$$\frac{O}{G_0} = \frac{2}{\varrho}\,\frac{p}{1-p}\,\frac{2\,M_x + M_y}{M_x\,M_y}\,L(a)\,. \tag{25}$$

In beiden Fällen ist a durch (9) gegeben. Da nach Voraussetzung die zusammengehörenden Wertepaare (x, y) auf der Geraden $y = tx$ liegen, ist die relative Streuung s/M für beide Verteilungen gleich. Es ist also gleichgültig, ob zur Ermittlung von a die x- oder y-Verteilung benutzt wird. Umgekehrt sind die relativen Streuungen s_x/M_x und s_y/M_y ein Maß dafür, ob die gemachte Voraussetzung zutrifft und der angegebene Weg zur Berechnung der inneren Oberfläche beschreitbar ist. Die untere Grenze wurde auch in diesen Fällen bis auf $x = 0$ erweitert.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß diese Rechnungen auch bei entgegengerichteter Fragestellung von einigem Nutzen sind. Ist die innere Oberfläche durch Adsorptions- oder kalorische Messungen bestimmt worden, so ermöglichen sie bei bekanntem Medianwert des Durchmessers eine Aussage über die Streuung oder, wohl der wichtigere Fall, bei plausiblen Annahmen über die Streuung eine Abschätzung des mittleren Porendurchmessers.

(Eingegangen am 23. Februar 1953.)

Mitteilung (aus dem Physikalisch-Petrologischen Laboratorium der Abteilung Kohleveredlung der Deutschen Kohlenbergbau-Leitung, Essen.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Adolf Dahme*, Essen, Gemarkenstr. 52.

Die Torsionssteifigkeit von kreuzförmigen Querschnitten*.

Von G. Lein.

1. Einleitung. Im folgenden wird an prismatischen Stäben von kreuzförmigem Querschnitt, wie sie in Abb. 1 dargestellt sind, der Einfluß der Ausrundungen im Kreuzungspunkt auf die Torsionssteifigkeit untersucht. Die Querschnitte sind, bis auf den der Abb. 1c, in ihrer Form ungefähr gleich denen der üblichen Walzeisenprofile, sie lassen sich aber im Gegensatz zu diesen mathematisch verhältnismäßig leicht behandeln. Es ist zu erwarten, daß die Ausrundungen bei Walzeisenprofilen denselben Einfluß haben.

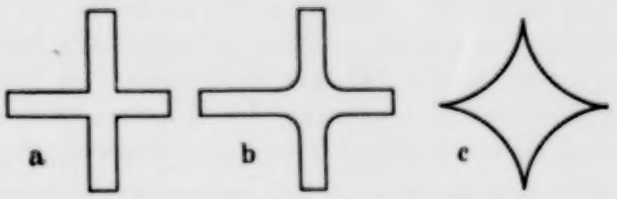


Abb. 1a, b, c. Die untersuchten Querschnittsformen.

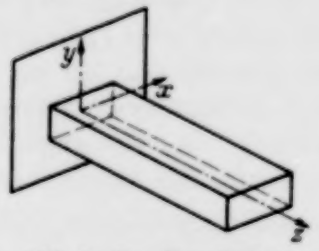


Abb. 2. Das Koordinatensystem x, y, z.

In Ziff. 2 wird die Torsionssteifigkeit des Querschnittes nach Abbild. 1a in Anlehnung an eine Untersuchung von *C. Weber*[1] mit Hilfe der konformen Abbildung bestimmt. In Ziff. 3 bis 7 werden die Torsionssteifigkeiten aller drei Querschnittstypen der Abb. 1 mit den Minimalsätzen der Elastizitätstheorie eingeschrankt. Die Ergebnisse werden in einer Näherungsformel zusammengefaßt.

Zunächst stellen wir die bekannten Grundgleichungen der *De Saint-Venant*schen Theorie der Torsion zusammen. Mit dem durch Abb. 2 definierten Koordinatensystem (x, y, z) und dem Torsionswinkel ϑ je Längeneinheit des Stabes werden die Verschiebungen in der x- und y Richtung $u = -\vartheta\, y\, z$ und $v = \vartheta\, x\, z$. Dazu tritt im allgemeinen eine Verwölbung $w(x, y)$ Die Verzerrungen sind

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y}\,, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x}\,, \tag{1}$$

und die zugehörigen Schubspannungen werden

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}\,, \qquad \tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}\,,$$

wo G den Schubmodul bedeutet. Man kann sie mit einer Spannungsfunktion $F(x, y)$, die der Randbedingung

$$F_{Rand} = 0 \tag{2}$$

genügt, in der Form

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}\,, \qquad \tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

darstellen. Das Torsionsmoment wird dann mit dem Torsionssteifigkeitsmoment J_t

$$M_t = G\,\vartheta\, J_t = 2 \cdot \iint F\, dx\, dy\,. \tag{3}$$

Die Spannungsfunktion F hat die allgemeine Form

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\, G\,\vartheta\,(-r^2 + \psi(x, y))\,, \tag{4}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$. Darin ist $\psi(x, y)$ der Imaginärteil einer komplexen Funktion $h(x + i\,y)$, deren Realteil gleich $2\,w/\vartheta$ wird, also mit $x + i\,y = z$

$$\left.\begin{aligned} F + \frac{1}{2}\, G\,\vartheta\, r^2 = \frac{1}{2}\, G\,\vartheta\, Im\, h(z) = \frac{1}{2}\, G\,\vartheta\,\psi(x, y), \\ w = \frac{1}{2}\,\vartheta\, Re\, h(z) = \frac{1}{2}\,\vartheta\,\varphi(x, y)\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

* Auszug aus der Stuttgarter Dissertation (Berichter: Prof. *Grammel*, Mitberichter: Prof. *Siebel*).

[1] *C. Weber*, Der Verdrehungswinkel von Walzeisenträgern. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik, *August Föppl* zum 70. Geburtstag, S. 102, Berlin 1924.

Die Randbedingung für ψ folgt unmittelbar aus (2) und (4) zu

$$\psi_{Rand} = r^2_{Rand} \,. \tag{6}$$

Eine mechanische Deutung der Spannungsfunktion wird durch das *Prandtl*sche Seifenhautgleichnis gegeben.

2. Der Kreuzquerschnitt ohne Ausrundung. In seiner Untersuchung berechnet *C. Weber* näherungsweise den Wert der Torsionssteifigkeit eines Stabes mit dem Querschnitt nach Abb. 1a. Der Querschnitt wird konform auf den Einheitskreis abgebildet. Aus den Randwerten der Potentialfunktion $\psi\,(x, y)$ wird ihr Wert in der Kreismitte berechnet. Mit diesem Wert ist dann eine Näherungsformel für J_t gefunden.

Hier soll ein anderer Weg beschritten werden, der einen genaueren Wert für J_t gibt. Dazu teilen wir den Querschnitt in mehrere Bereiche auf, den quadratischen Innenteil und die daran angesetzten Streifen. Kennen wir die Spannungsfunktion F entlang der Trennungslinien, so lassen sich einfache Reihenansätze von F für beide Bereiche aufstellen. Diesen Verlauf von F liefert die konforme Abbildung.

Es genügt, den ersten Quadranten der z-Ebene (Abb. 3) zu untersuchen. Mit Einführung von $z_1 = r_1\, e^{i\mu_1} = e^{\lambda_1}\, e^{i\mu_1}$ lautet die Abbildungsfunktion [1] dieses Querschnittsteiles auf den Einheitskreis, (Abb. 4)

$$z = \frac{2b}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\cos\frac{\mu_1 - i\lambda_1}{2}} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\cos\frac{\mu_1 - i\lambda_1}{2}}\right). \tag{7}$$

Um die Werte der Spannungsfunktion F entlang der Linie BK, (Abb. 3), bestimmen zu können, muß man zuerst den Verlauf von BK innerhalb des Einheitskreises der z_1-Ebene bestimmen. Dazu geben wir uns nach Zerlegung der Abbildungsfunktion (7) in Real- und Imaginärteil einige Werte von μ_1 vor und variieren dann λ_1 solange, bis die entsprechenden Punkte der z-Ebene auf die Linie BK fallen. Die Rechnung wurde für sieben Punkte durchgeführt, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind. In Abb. 4 ist der Verlauf der Linie BKH in der z_1-Ebene eingetragen.

Tabelle 1.

Nr.	x/b	y/b	μ_1	r_1
1	1,0	0,0	0°	0,0856
2	1,0	0,1462	30°	0,0903
3	1,0	0,2989	60°	0,1062
4	1,0	0,4642	90°	0,1417
5	1,0	0,6505	120°	0,2219
6	1,0	0,8524	150°	0,4248
7	1,0	1,0	180°	1,0

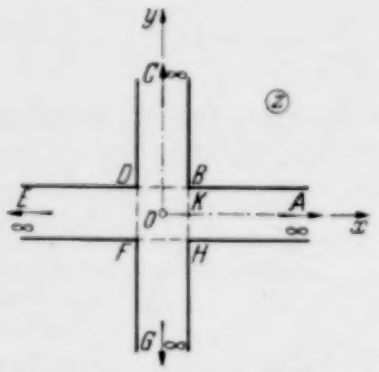


Abb. 3. Der Kreuzquerschnitt mit scharfen Ecken in der z-Ebene.

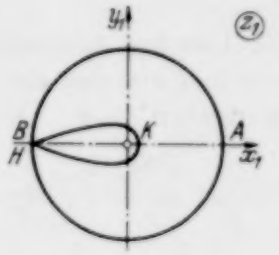


Abb. 4. Konforme Abbildung des Querschnittes in der z_1-Ebene.

Nun sind die Randwerte der Potentialfunktion $\psi\,(x, y)$ am Einheitskreis zu ermitteln. Mit der Randbedingung (6) ergibt sich aus (7) dafür

$$\psi_{Rand} = \frac{4b^2}{\pi^2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\left|\cos\frac{\mu_1}{2}\right|} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\left|\cos\frac{\mu_1}{2}\right|}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\right]. \tag{8}$$

Das Glied $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\sqrt{|\cos\mu_1/2|}$ wird für $\mu_1 = 0$ unendlich. Diese Singularität wird dadurch beseitigt, daß man von ψ die Potentialfunktion

$$\psi_0 = \frac{4b^2}{\pi^2}\, Re\left[\ln(1 - z_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \ln 32\right)\right]^2 \tag{9}$$

abzieht [2]. Die Randwerte $(\psi - \psi_0)_{Rand}$ lassen sich dann in eine *Fourier*reihe zerlegen. Die harmonische Analyse nach dem *Runge*schen Verfahren für 18 Intervalle von je 10° ergibt

$$(\psi - \psi_0)_{Rand} = \frac{4b^2}{\pi^2}\left[2{,}9272 + \sum_{n=1}^{18}\left(\frac{1}{n^2} + c_n\right)\cos n\mu_1\right],$$

[1] *C. Weber*, a. a. O.
[2] *C. Weber*, a. a. O.

mit

$c_1 = 0{,}38334$	$c_7 = 0{,}00390$	$c_{13} = 0{,}00095$
$c_2 = -0{,}04696$	$c_8 = -0{,}00228$	$c_{14} = -0{,}00092$
$c_3 = 0{,}03004$	$c_9 = 0{,}00217$	$c_{15} = 0{,}00074$
$c_4 = -0{,}01089$	$c_{10} = -0{,}00147$	$c_{16} = -0{,}00081$
$c_5 = 0{,}00874$	$c_{11} = 0{,}00133$	$c_{17} = 0{,}00063$
$c_6 = -0{,}00433$	$c_{12} = -0{,}00107$	$c_{18} = -0{,}00039$

Die Potentialfunktion $\psi - \psi_0$ lautet dann

$$\psi - \psi_0 = \frac{4\,b^2}{\pi^2}\left[2{,}9272 + \sum_{n=1}^{18}\left(\frac{1}{n^2} + c_n\right) r_1^n \cos n\,\mu_1\right]. \tag{10}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten der Tabelle 1 findet man die Werte $(\psi - \psi_0)$ in den sieben gegebenen Punkten. Die Funktion ψ selbst erhält man durch Addieren der entsprechenden Werte ψ_0 aus (9): Tabelle 2 gibt die Ergebnisse an.

Tabelle 2.

Nr.	x/b	y/b	ψ/b^2	$F/\frac{1}{2} G\,\vartheta b^2$
1	1,0	0,0	3,9906	2,9906
2	1,0	0,1462	3,9658	2,9445
3	1,0	0,2989	3,8848	2,7955
4	1,0	0,4642	3,7266	2,5111
5	1,0	0,6505	3,4421	2,0190
6	1,0	0,8524	2,9269	1,2003
7	1,0	1,0	2,0	0,0

Für beide Bereiche suchen wir nun Lösungsansätze, die allen Randbedingungen genügen. Für das Innengebiet, dem wir den Index 1 zuordnen, ist eine vierfach-symmetrische Spannungsfunktion F_1 in der allgemeinen Form (4) aufzustellen. Die Potentialfunktion ψ_1 soll dabei eine Reihe mit noch unbestimmten Koeffizienten sein. Es bieten sich zwei einfache Möglichkeiten, Einzelglieder der Form $Im\,i\,z^{4n}$ und Glieder $Im\,i\,(\cos z + \mathfrak{Cof}\,z)$. Mit unendlich vielen Gliedern kann man aus beiden Formen die exakte Lösung bilden. Wir wählen die erste Art und bilden mit den dimensionslosen Größen $\zeta = z/b$, $\xi = x/b$, $\eta = y/b$ und $\varrho = r/b$ den Ansatz

$$F_1 = \frac{1}{2} G\,\vartheta\,b^2\left(-\varrho^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n}\,Im\,i\,\zeta^{4n}\right) = \frac{1}{2} G\vartheta\,b^2\left(-\varrho^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n}\,\varrho^{4n}\cos 4n\mu\right). \tag{11}$$

Um das Aufstellen eines Ansatzes für die Streifen mit dem Index 2 zu erleichtern, machen wir uns anhand des *Prandtl*schen Seifenhautgleichnisses ein anschauliches Bild von der Spannungsfunktion. Wegen der Symmetrie des Querschnittes wird die höchste Erhebung der Seifenhaut, und damit der Größtwert von F, in der Mitte der Kreuzung liegen. Von da nimmt die Höhe entlang der Streifen ab, um sich asymptotisch dem Wert zu nähern, der sich bei einem Streifen ohne Kreuzung einstellen würde. Für diesen einfachen Fall ist die Spannungsfunktion bekannt. Wenn wir nur den Steifen $\xi \geq 1$, $-1 \leq \eta \leq +1$ untersuchen, lautet sie $F_2' = \frac{1}{2} G\,\vartheta\,b^2(-\varrho^2 + \psi_2')$ mit $\psi_2' = 2 + \xi^2 - \eta^2$, also

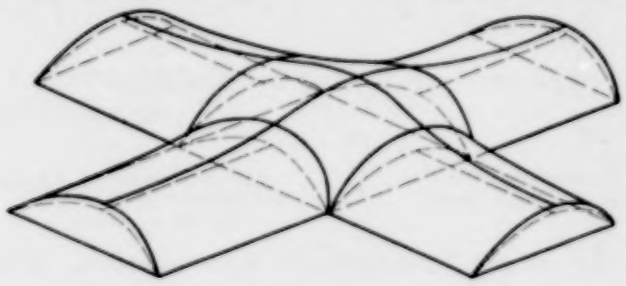


Abb. 5. Darstellung der Spannungsfunktion.

$$F_2' = \frac{1}{2} G\,\vartheta\,b^2\,2\,(1 - \eta^2). \tag{12}$$

Wir überlagern ihr eine Potentialfunktion ψ_2'', die mit wachsendem ξ asymptotisch gegen Null geht, für $\eta = \pm 1$ Null wird und welche freie Koeffizienten enthält. Der Ansatz lautet

$$\psi_2'' = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\,Im\,i \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right) = c_1 e^{-\frac{\pi}{2}\xi}\cos\frac{\pi}{2}\eta + c_3 e^{-\frac{3\pi}{2}\xi}\cos\frac{3\pi}{2}\eta + \cdots. \tag{13}$$

Damit wird die vollständige Spannungsfunktion

$$F_2 = \frac{1}{2} G\vartheta\,b^2\left[2\,(1-\eta^2) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right)\cos\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right]. \tag{14}$$

Die Koeffizienten a_{4n} und c_{2n-1} bestimmen sich aus der Bedingung, daß für $\xi = 1$ die Funktionen F_1 und F_2 mit den oben berechneten Werten F übereinstimmen müssen. Von den

sieben Punkten der Tabelle 1 wählen wir die Punkte 1, 3, 5 und 7 und verlangen dafür $F_1 = F_2 = F$. Es ergeben sich die Koeffizienten

$$a_0 = 3{,}7490\,, \quad a_4 = 0{,}2591\,, \quad a_8 = -\,0{,}0229\,, \quad a_{12} = 0{,}0054$$
$$c_1 = 5{,}6481\,, \quad c_3 = -\,26{,}0175\,, \quad c_5 = 129{,}3345\,.$$

In Abb. 5 ist F räumlich dargestellt. Der Anteil F_2' ist gestrichelt eingezeichnet.

Nun ist das Torsionsmoment M_t nach (3) zu berechnen. Man erhält für Bereich 1

$$M_{t1} = G\,\vartheta\,b^4 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(-\,\xi^2 - \eta^2 + \sum_{n=0}^{3} a_{4n}\, Im\, i\zeta^{4n}\right) d\xi\, d\eta = 12{,}005 \cdot G\,\vartheta\,b^4\,.$$

Die Spannungsfunktion F_2 gilt für Streifen, die sich bis ins Unendliche erstrecken. Es interessieren aber nur Querschnitte mit endlichen Streifen. Zunächst betrachten wir nur ψ_2''. Die Integration des allgemeinen Gliedes $Re\,\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\,\zeta\right)$ liefert mit der dimensionslosen Größe $\lambda = l/b$, wobei l die Entfernung des Streifenendes vom Kreuzungsmittelpunkt ist,

$$\int_{-1}^{1}\int_{1}^{\lambda} Re\,\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\,\zeta\right) d\xi\, d\eta$$
$$= -\,\frac{8}{(2n-1)^2\,\pi^2}\left[\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\,\lambda\right) - \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\right)\right] \sin\frac{2n-1}{2}\,\pi\,.$$

Für $\lambda = \infty$ wird die eckige Klammer zu $-\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\right)$; schon bei $\lambda = 5$ ist der erste Ausdruck in der Klammer nur 1/500 des zweiten. Man kann deshalb bei Streifen mit $l \geq 5\,b$ die Glieder mit λ vernachlässigen. Die Funktion ψ_2'' klingt also sehr rasch ab. Der Momentenanteil M_{t2}'' wird dann $M_{t2}'' = 0{,}9745\,G\,\vartheta\,b^4$ und für alle vier Streifen

$$\sum_{1}^{4} M_{t2}'' = 3{,}898\,G\,\vartheta\,b^4\,.$$

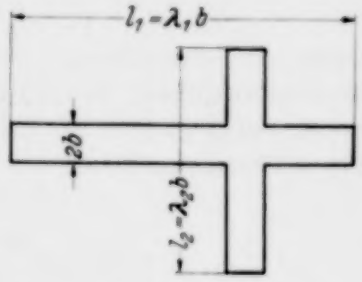


Abb. 6. Einführung der Streifenlängen l_1 und l_2.

Integriert man den Anteil F_2' über ξ von $\xi = 1$ bis $\xi = \lambda$, so begeht man einen Fehler, da man die Spannungsfunktion am Streifenende senkrecht abschneidet. In Wirklichkeit fällt sie jedoch am Ende allmählich auf Null ab. Der Abfall läßt sich als Abzug von der Steifenlänge darstellen [1]. Die obere Integrationsgrenze ist dann $\bar{\lambda} = \lambda - 0{,}625$ zu setzen. Man erhält

$$M_{t2}' = G\,\vartheta\,b^4 \int_{-1}^{1}\int_{1}^{\bar{\lambda}} 2\,(1-\eta^2)\,d\xi\,d\eta = \frac{8}{3}\,(\bar{\lambda}-1)\,G\,\vartheta\,b^4 = \frac{8}{3}\,(\lambda - 1{,}625)\,G\,\vartheta\,b^4\,.$$

Unter Einführung der Gesamtlängen $l_1 = \lambda_1\,b$ und $l_2 = \lambda_2\,b$ nach Abb. 6 wird für den Gesamtquerschnitt

$$J_t = \frac{M_t}{G\,\vartheta} = b^4\left[15{,}903 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 6{,}5)\right]. \tag{15}$$

3. Minimalprobleme [2]. Eine obere Schranke für das Torsionssteifigkeitsmoment bestimmt sich aus dem Satz vom Minimum der potentiellen Energie. Dieser lautet hier: Wählt man einen beliebigen Ansatz für die Verwölbung w, der stetig ist und die Symmetriebedingungen erfüllt, dann ist die daraus mit dem Drillwinkel ϑ je Längeneinheit und der Stablänge l gebildete potentielle Energie

$$\frac{1}{2}\,G\,l\,\vartheta^2 \int\int \left[\left(-\,y + \frac{\partial(w|\vartheta)}{\partial x}\right)^2 + \left(x + \frac{\partial(w|\vartheta)}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

[1] *J. W. Geckeler*, Elastostatik, Handbuch der Physik VI, S. 153, Berlin 1928.
[2] *C. Weber*, Bestimmung des Steifigkeitswertes von Körpern durch zwei Näherungsverfahren, Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 244.

mindestens gleich der wahren potentiellen Energie $1/2\ M_t \vartheta l$, und somit hat man die obere Schranke

$$J_t \leq \int\int \left[\left(-y+\frac{\partial(w|\vartheta)}{\partial x}\right)^2+\left(x+\frac{\partial(w|\vartheta)}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \equiv A\,. \tag{16}$$

Eine untere Schranke erhält man aus dem Satz von *Castigliano*, der hier folgendes aussagt: Wählt man für die Spannungsfunktion F einen Näherungsansatz von der Form $F = 1/2\ G\,\vartheta\, f(x, y)$, der stetig ist und die Randbedingung $F_{Rand} = 0$ erfüllt, so ist der Ausdruck

$$\frac{l}{2G}\int\int\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - 2\,\vartheta\, l \int\int F\,dx\,dy$$

mindestens gleich dem Wert $-1/2\ M_t\,\vartheta\, l$, und die untere Schranke wird somit

$$\left.\begin{aligned} J_t &\geq -\frac{1}{4}\int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + 2\int\int f\,dx\,dy \\ &= -\frac{1}{4}\int\int \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy + 2\int\int f\,dx\,dy \equiv -II\,. \end{aligned}\right| \tag{17}$$

Das Integral $1/4\int\int \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy$ stellt, ebenso wie das Integral in (16), bis auf den konstanten Faktor $1/2\ G\,l\,\vartheta^2$ die Formänderungsarbeit dar; wir bezeichnen es deshalb ebenfalls mit A. Das Integral $2\int\int f\,dx\,dy$ nennen wir L. Bei beiden Verfahren kann man die *Ritz*sche Methode anwenden.

4. Der Kreuzquerschnitt ohne Ausrundung. a) Die obere Schranke. Wir gehen von der Spannungsfunktion aus und wählen jetzt für das quadratische Innengebiet den Ansatz

$$F_1 = \frac{1}{2}\,G\,\vartheta\, f_1 = \frac{1}{2}\,G\,\vartheta\, b^2\left[-\varrho^2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\, Im\, i\left(\cos\frac{2n-1}{2}\,\pi\zeta + \mathfrak{Cof}\,\frac{2n-1}{2}\,\pi\zeta\right)\right], \tag{18}$$

wobei die dimensionslosen Größen die gleiche Bedeutung wie oben haben. Dieser Ansatz ist hier vorzuziehen, da sich die Stetigkeitsbedingung an der Trennungslinie der Bereiche 1 und 2 besser erfüllen läßt als mit dem Ansatz (11) für F_1. Nach (5) lautet damit der Ansatz für die Verwölbungsfunktion

$$\frac{w_1}{\vartheta} = \frac{1}{2}\,b^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\, Re\, i\left(\cos\frac{2n-1}{2}\,\pi\zeta + \mathfrak{Cof}\,\frac{2n-1}{2}\,\pi\zeta\right). \tag{19}$$

Für den Streifen $\xi \geq 1\,,\ -1 \leq \eta \leq +1$ übernehmen wir den Ansatz (14) und erhalten damit

$$\frac{w_2}{\vartheta} = \frac{1}{2}\,b^2\left[Re\, i\,\zeta^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\, Re\, i \exp\left(-\frac{2n-1}{2}\,\pi\zeta\right)\right]. \tag{20}$$

Wegen der Symmetrie genügt es wieder, nur den einen Streifen zu betrachten.

Mit (19) und (20) ist der Integrand A nach (16) zu bilden. Für die beiden Bereiche ergeben sich die Doppelintegrale mit $h = 2n-1$

$$\left.\begin{aligned} A_1 = b^4 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Bigg\{\Bigg[&-\eta_l + \frac{\pi}{4}\sum_h a_h h\left(\cos\frac{h\pi}{2}\,\xi\ \mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{2}\,\eta - \mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{2}\,\xi\,\sin\frac{h\pi}{2}\,\eta\right)\Bigg]^2 + \\ &+\left[\xi - \frac{\pi}{4}\sum_h a_h h\left(-\sin\frac{h\pi}{2}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\frac{h\pi}{2}\,\eta + \mathfrak{Sin}\,\frac{h\pi}{2}\,\xi\cos\frac{h\pi}{2}\,\eta\right)\right]^2\Bigg\}\, d\xi\, d\eta \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A_2 = b^4 \int_{-1}^{1}\int_{1}^{\lambda}\Bigg\{\Bigg[&-2\,\eta - \frac{\pi}{4}\sum_h c_h\, h\, e^{-\frac{h\pi}{2}\xi}\,\sin\frac{h\pi}{2}\,\eta\Bigg]^2 + \\ &+\left[\frac{\pi}{4}\sum_h c_h\, h\, e^{-\frac{h\pi}{2}\xi}\cos\frac{h\pi}{2}\,\eta\right]^2\Bigg\}\, d\xi\, d\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nimmt man von jedem Ansatz drei Glieder, so erhält man durch die Integration mit den neuen Koeffizienten $a_1' = a_1$, $a_3' = 10^2\, a_3$, $a_5' = 10^4\, a_5$

$$\left.\begin{aligned} A_1 = b^4\Big(&\frac{8}{3} + 2{,}7744\, a_1'^{\,2} + 1{,}1500\, a_3'^{\,2} + 0{,}1137\, a_5'^{\,2} + \\ &+ 1{,}6760\, a_1' a_3' - 0{,}2486\, a_1' a_5' + 0{,}1265\, a_3' a_5' + \\ &+ 2{,}1438\, a_1' + 0{,}5440\, a_3' - 0{,}0978\, a_5'\Big)\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Der Ausdruck (22) wird eine Funktion von c_1, c_3 und c_5. Für alle vier Streifen ist

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^4 A_2 = b^4\Big[&\frac{8}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - 6{,}5) + \frac{\pi}{2} c_1^2\, e^{-\pi} + \frac{3\pi}{2} c_3^2\, e^{-3\pi} + \frac{5\pi}{2} c_5^2\, e^{-5\pi} + \\ &+ \frac{64}{\pi^2} c_1\, e^{-\pi/2} - \frac{64}{9\pi^2} c_3\, e^{-3\pi/2} + \frac{64}{25\pi^2} c_5\, e^{-5\pi/2}\Big]\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Um die c_h in den a_h auszudrücken, benutzen wir die Stetigkeitsforderung für den Übergang von Bereich 1 zu Bereich 2. Sie lautet

$$(w_1)_{\xi=1} = (w_2)_{\xi=1}\,. \tag{25}$$

Im Ausdruck $(w_1)_{\xi=1}$ nach (19) entwickeln wir die Glieder $\mathfrak{Sin}\frac{k\pi}{2}\eta$ und 2η in eine Fourierreihe von der Form $\sum b_h \sin\frac{h\pi}{2}\eta$. Durch Vergleich beider Seiten von (25) erhalten wir dann

$$c_1 e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{\pi^2} + a_1\left(\frac{2}{\pi}\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2} - \mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\right) - a_3\frac{6}{5\pi}\mathfrak{Cof}\frac{3\pi}{2} + a_5\frac{10}{13\pi}\mathfrak{Cof}\frac{5\pi}{2}\,,$$

$$c_3 e^{-\frac{3\pi}{2}} = -\frac{16}{9\pi^2} - a_1\frac{2}{5\pi}\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2} + a_3\left(\frac{2}{3\pi}\mathfrak{Cof}\frac{3\pi}{2} - \mathfrak{Sin}\frac{3\pi}{2}\right) - a_5\frac{10}{17\pi}\mathfrak{Cof}\frac{5\pi}{2}\,,$$

$$c_5 e^{-\frac{5\pi}{2}} = \frac{16}{25\pi^2} + a_1\frac{2}{13\pi}\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2} - a_3\frac{6}{17\pi}\mathfrak{Cof}\frac{3\pi}{2} + a_5\left(\frac{2}{5\pi}\mathfrak{Cof}\frac{5\pi}{2} - \mathfrak{Sin}\frac{5\pi}{2}\right).$$

Diese Werte setzen wir in (24) ein und bilden $A = A_1 + \Sigma A_2$. Es wird

$$\begin{aligned} A = b^4\Big[&\frac{8}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - 6{,}5) + 4{,}1524\, a_1'^{\,2} + 2{,}1575\, a_3'^{\,2} + 0{,}2172\, a_5'^{\,2} + \\ &+ 17{,}6392 - 5{,}0762\, a_1' - 0{,}9374\, a_3' + 0{,}2404\, a_5' + \\ &+ 3{,}3457\, a_1' a_3' - 0{,}4627\, a_1' a_5' + 0{,}3155\, a_3' a_5'\Big]\,. \end{aligned}$$

Das Minimum für A ergibt sich aus den Bedingungen $\frac{\partial A}{\partial a_1'} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial a_3'} = 0$ und $\frac{\partial A}{\partial a_5'} = 0$. Man erhält so

$$a_1' = 0{,}84953\,, \qquad a_3' = -0{,}40000\,, \qquad a_5' = 0{,}70975\,.$$

Mit (16) wird also

$$J_t < b^4\left[15{,}800 + \frac{8}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 - 6{,}5)\right].$$

b) Die untere Schranke. Die Berechnung der unteren Schranke erfolgt nach (17). Für den Innenbereich nehmen wir den Ansatz (18), für den Streifen $\xi \geq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ den Ansatz (14). Da hier Gw_1 und F_1 sowie Gw_2 und F_2 jeweils Real- und Imaginärteil der gleichen komplexen Funktion sind, hat das Integral $1/4 \iint \mathrm{grad}^2 f\, dx\, dy$ den gleichen Wert wie bei der Berechnung der oberen Schranke das Integral A. Wir können also die Ausdrücke (23) und (24) übernehmen.

Neu zu berechnen sind die Integrale $L_1 = 2\iint f_1\, dx\, dy$ und $L_2 = 2\iint f_2\, dx\, dy$. Wir erhalten

$$L_1 = b^4\left[\frac{32}{3} + \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{2}\pi\cdot\mathfrak{Sin}\frac{2n-1}{2}\pi\right]$$

und für alle vier Streifen

$$\sum_1^4 L_2 = b^4\left[\frac{16}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)+\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n-1}}{(2n-1)^2}\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\right)\sin\frac{2n-1}{2}\pi\right]. \qquad (26)$$

Die Stetigkeitsbedingung an der Trennungslinie lautet jetzt

$$(f_1)_{\xi=1} = (f_2)_{\xi=1}. \qquad (27)$$

Setzt man (14) und (18) in (27) ein und entwickelt in (14) das Glied (η^2-1) in eine *Fourier*reihe, so erhält man durch Vergleich beider Seiten

$$c_1 e^{-\pi/2} = -\frac{32}{\pi^3}+a_1 \mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2},$$

$$c_3 e^{-3\pi/2} = \frac{32}{27\pi^3}+a_3 \mathfrak{Cof}\frac{3\pi}{2},$$

$$c_5 e^{-5\pi/2} = -\frac{32}{125\pi^3}+a_5 \mathfrak{Cof}\frac{5\pi}{2}.$$

Die Werte setzen wir in (24) und (26) ein und bilden $\Pi = A - L$. Es ergibt sich mit den Koeffizienten $a_1' = 10\,a_1$, $a_3' = 10^2\,a_3$, $a_5' = 10^4\,a_5$

$$\Pi = b^4\Big[-\frac{8}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)+0{,}1266\,a_1'^2+2{,}6101\,a_3'^2+0{,}2440\,a_5'^2-$$
$$-6{,}3195+0{,}1676\,a_1'a_3'-0{,}0249\,a_1'a_5'+0{,}1265\,a_3'a_5'-$$
$$-2{,}0915\,a_1'+1{,}1455\,a_3'-0{,}1479\,a_5'\Big].$$

Das Minimum für Π folgt aus den Bedingungen $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1'}=0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial a_3'}=0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial a_5'}=0$. Die entsprechenden Koeffizienten sind

$$a_1' = 8{,}6878, \qquad a_3' = -0{,}5197, \qquad a_5' = 0{,}8804.$$

Nach (17) wird damit

$$J_t > b^4\left[15{,}760+\frac{8}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)\right].$$

Zusammenfassend läßt sich folgende Einschrankung angeben:

$$b^4\left[15{,}760+\frac{8}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)\right] < J_t < b^4\left[15{,}800+\frac{8}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)\right].$$

Der arithmetische Mittelwert wird

$$\overline{J}_t = b^4\left[15{,}780+\frac{8}{3}(\lambda_1+\lambda_2-6{,}5)\right]. \qquad (28)$$

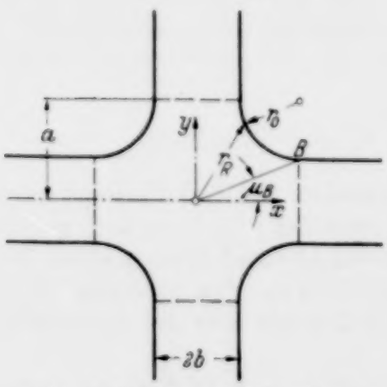


Abb. 7. Der Querschnitt mit ausgerundeten Ecken.

Der Wert, der mit Hilfe der konformen Abbildung in Ziff. 2 gefunden wurde, liegt um 0,8% höher.

5. Der Kreuzquerschnitt mit ausgerundeten Ecken. a) Die obere Schranke. Nach Abb. 7 trennen wir diesen Querschnitt ebenfalls an den Ansatzlinien der Streifen und beziehen alle Längen auf die Strecke $a = r_0 + b$. Die dimensionslosen Größen lauten dann $\zeta = z/a$, $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\varrho = r/a$. Dagegen soll λ die bisherige Bedeutung $\lambda = l/b$ behalten. Wir wählen jetzt einen Verwölbungsansatz

$$\frac{w_1}{\vartheta} = \frac{1}{2}b^2\sum_{n=1}^{\infty}a_{4n}\,Re\,i\zeta^{4n}, \qquad (29)$$

der sich hier besser eignet als der Ansatz (19), da wir alle Integrationen numerisch durchführen werden.

Durch partielle Differentiation bilden wir mit w_1 aus (29)

$$A_1 = b^4 \int\int \left[\left(\frac{a^2}{b^2}\,\eta_j + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{4n}\, \varrho^{4n-1} \sin (4n-1)\,\mu \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a^2}{b^2}\,\xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_{4n}\, \varrho^{4n-1} \cos (4n-1)\,\mu \right)^2 \right] \varrho \cdot d\varrho \cdot d\mu \,.$$

Nach Auflösen der runden Klammern und Integration über ϱ mit den Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = \varrho_{Rand} = \varrho_R$ wird

$$A_1 = 8\, b^4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4} \frac{a^4}{b^4}\, \varrho_R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nm}{n+m}\, a_{4n}\, a_{4m}\, \varrho_R^{4(n+m)} \cos 4\,(m-n)\,\mu - \right.$$
$$\left. - 2\, \frac{a^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}\, a_{4n}\, \varrho_R^{4n+2} \cos 4n\,\mu \right] d\mu \,.$$

Die Integration über μ ist in den zwei Bereichen $0 \leq \mu \leq \mu_B$ und $\mu_B \leq \mu \leq \pi/4$ getrennt durchzuführen. Im ersten Bereich gilt $\varrho_R = 1/\cos\mu$, im zweiten dagegen $\varrho_R = \cos\mu + \sin\mu - \sqrt{\varrho_0^2 - 1 + \sin 2\,\mu}$, mit $\varrho_0 = r_0/a$. Um die numerische Integration durchführen zu können, legen wir uns jetzt auf den Querschnitt $r_0 = b$, also $a = 2\,b$ und $\mu_B = 26{,}565°$ fest. Bei Beschränkung auf drei Glieder des Ansatzes (29) wird mit den Koeffizienten $a_4' = 10\,a_4$, $a_8' = 10 a_8$, $a_{12}' = 10\,a_{12}$

$$A_1 = b^4 \,[26{,}6302 + 0{,}0369\, a_4'^2 + 0{,}1024\, a_8'^2 + 0{,}2423\, a_{12}'^2 +$$
$$+ 0{,}0115\, a_4'\, a_8' - 0{,}0711\, a_4'\, a_{12}' + 0{,}0217\, a_8'\, a_{12}' -$$
$$- 0{,}1468\, a_4' + 0{,}7768\, a_8' - 0{,}2750\, a_{12}'] \,.$$

Für den Streifen $\xi \geq 1$, $-1/2 \leq \eta_j \leq +1/2$ schreiben wir Ansatz (20) in die neue Bezugsgröße $a = 2\,b$ um und integrieren über x von $x = 2\,b$ bis $x = l$ oder dimensionslos von $\xi = 1$ bis $\xi = l/2\,b = \lambda/2$. Auch hier werden für $l \geq 5\,b$ die Glieder $\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\lambda\right)$ gegen $\exp[-(2n-1)\pi]$ vernachlässigt. Das Ergebnis lautet bei einem dreigliedrigen Ansatz

$$\sum_1^4 A_2 = b^4 \left[\frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) + \frac{\pi}{2} c_1^2 e^{-2\pi} + \frac{3\pi}{2} c_3^2 e^{-6\pi} + \frac{5\pi}{2} c_5^2 e^{-10\pi} + \right.$$
$$\left. + \frac{64}{\pi^2} c_1 e^{-\pi} - \frac{64}{9\pi^2} c_3 e^{-3\pi} + \frac{64}{25\pi^2} c_5 e^{-5\pi} \right] . \qquad (30)$$

Die Stetigkeitsbedingung wird wieder $(w_1)_{\xi=1} = (w_2)_{\xi=1}$. Jetzt entwickeln wir in $(w_1)_{\xi=1}$ die Glieder mit η_j nicht in eine *Fourier*reihe, da das zu umständlich wäre, sondern verlangen lediglich Übereinstimmung beider Ansätze in den Punkten $\xi = 1$; $\eta_j = \pm 1/6, \pm 1/3, \pm 1/2$.

Diese Forderung liefert

$$c_1 e^{-\pi} = 3{,}3174 - 0{,}1400\, a_4' - 0{,}0396\, a_8' + 0{,}1194\, a_{12}' \,,$$
$$c_3 e^{-3\pi} = -0{,}4444 + 0{,}0068\, a_4' - 0{,}1158\, a_8' - 0{,}1558\, a_{12}' \,,$$
$$c_5 e^{-5\pi} = 0{,}2382 - 0{,}0032\, a_4' + 0{,}0550\, a_8' - 0{,}0238\, a_{12}' \,.$$

Setzt man diese Werte in (30) ein und bildet $A = A_1 + \sum_1^4 A_2$, so ergibt sich

$$A = b^4 \left[\frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) + 0{,}0681\, a_4'^2 + 0{,}1919\, a_8'^2 + 0{,}3836\, a_{12}'^2 + \right.$$
$$+ 67{,}1870 + 0{,}0187\, a_4'\, a_8' - 0{,}1320\, a_4'\, a_{12}' + 0{,}1563\, a_8'\, a_{12}' -$$
$$\left. - 2{,}5600\, a_4' + 0{,}8960\, a_8' + 2{,}4124\, a_{12}' \right] .$$

Die Minimalbedingung gibt $a_4' = 20{,}4758$, $a_8' = -3{,}8094$ und $a_{12}' = 1{,}1648$. Damit wird die obere Schranke

$$J_t < b^4 \left[40{,}676 + \frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) \right] .$$

b) Die untere Schranke. Es ist eine Spannungsfunktion $F = 1/2\, G\, \vartheta\, f(x, y)$ aufzustellen, die die Randbedingung (2) erfüllt. Wegen der Symmetrie genügt es, nur einen 45°-Sektor des Innengebietes zu betrachten. Nach Abb. 7 teilen wir den ersten 45°-Sektor in die Bereiche 1 mit $0 \leq \mu \leq \mu_B$ und 2 mit $\mu_B \leq \mu \leq \pi/4$. Als Grundfunktion für beide wählen wir

$$f = a^2 (-\varrho^2 + a_0 + a_4\, \varrho^4 \cos 4\,\mu + a_8\, \varrho^8 \cos 8\,\mu)\,. \tag{31}$$

Im Bereich 1 fügen wir zu jedem der ersten drei Glieder ein weiteres hinzu, so daß f_1 für $\xi = 1$, $\eta = \pm 1/2$, oder entsprechend in Polarkoordinaten $\varrho = 1/\cos \mu_B$, $\mu = \pm \mu_B$, Null wird. Bis auf konstante Faktoren sollen alle Zusatzglieder die Form $\varrho^8 \cos 8\,\mu$ haben. Der Koeffizient a_8 wird dann eine Funktion von a_0 und a_4. Der Ansatz lautet somit

$$f_1(\varrho, \mu) = a^2 \left[-\varrho^2 + \varrho^8 \cos 8\,\mu\, \frac{\cos^6 \mu_B}{\cos 8\,\mu_B} + a_0 \left(1 - \varrho^8 \cos 8\,\mu \frac{\cos^8 \mu_B}{\cos 8\,\mu_B}\right) + \right.$$
$$\left. + a_4 \left(\varrho^4 \cos 4\,\mu - \varrho^8 \cos 8\,\mu \frac{\cos^4 \mu_B \cos 4\,\mu_B}{\cos 8\,\mu_B}\right)\right]$$

oder

$$f_1(\varrho, \mu) = a^2 (-\varrho^2 + a_0 + a_4\, \varrho^4 \cos 4\,\mu + a_8\, \varrho^8 \cos 8\,\mu) \tag{32}$$

mit

$$a_8 = \frac{\cos^6 \mu_B}{\cos 8\,\mu_B} - a_0 \frac{\cos^8 \mu_B}{\cos 8\,\mu_B} - a_4 \frac{\cos^4 \mu_B \cos 4\,\mu_B}{\cos 8\,\mu_B}\,.$$

Zur Berechnung von Π_1 formen wir A aus (17) um:

$$A = \frac{1}{4} \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{1}{4} \int\int \operatorname{grad}^2 f\, dx\, dy = \frac{1}{4} \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)^2\right] r\, dr\, d\mu\,.$$

Die Werte $\frac{\partial f_1}{\partial r}$ und $\frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial \mu}$ aus (32) setzen wir in A_1 ein und integrieren über ϱ von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varrho_R$. Für alle vier Quadranten ergibt sich

$$A_1 = 8\, a^4 \int_0^{\mu_B} \left(\frac{1}{4}\, \varrho_R^4 + \frac{1}{2}\, a_4^2\, \varrho_R^8 + a_8^2\, \varrho_R^{16} + \frac{4}{3}\, a_4\, a_8\, \varrho_R^{12} \cos 4\,\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3}\, a_4\, \varrho_R^6 \cos 4\,\mu - \frac{4}{5}\, a_8\, \varrho_R^{10} \cos 8\,\mu\right) d\mu\,.$$

Wir setzen wieder $r_0 = b$, $\mu_B = 25{,}565°$ und integrieren numerisch über μ. Nach Elimination von a_8 erhält man

$$A_1 = a^4 (2{,}9369 + 1{,}8323\, a_0^2 + 2{,}3152\, a_4^2 - 0{,}1977\, a_0\, a_4 - 3{,}7732\, a_0 - 1{,}4728\, a_4)\,.$$

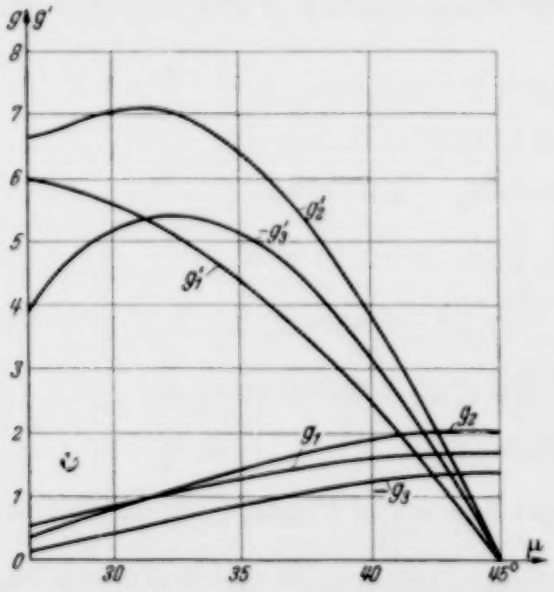


Abb. 8. Die Funktionen $g_i(\mu)$ und $g_i'(\mu)$.

Der Bereich 2 wird ähnlich behandelt. Die Grundfunktion wird beibehalten, die Zusatzglieder jedoch haben die Form $\varrho^8\, g(\mu)$. Der Ansatz lautet

$$f_2(\varrho, \mu) = a^2 \{-\varrho^2 + \varrho^8\, g_1(\mu) + a_0 [1 - \varrho^8\, g_2(\mu)] + a_4 [\varrho^4 \cos 4\,\mu - \varrho^8\, g_3(\mu)]\}\,,$$

wobei aus der Randbedingung folgt

$$g_1(\mu) = \frac{1}{\varrho_R^6}\,, \qquad g_2(\mu) = \frac{1}{\varrho_R^8}\,, \qquad g_3(\mu) = \frac{\cos 4\,\mu}{\varrho_R^4}\,.$$

Die Funktionen $g_i(\mu)$, sowie ihre Ableitungen $dg_i(\mu)/d\mu = g_i'(\mu)$ sind in Abb. 8 aufgetragen. Damit ist A_2 zu bilden. Nach der Integration über ϱ ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} &64\, g_i^2(\mu) + g_i'^2(\mu) = G_{ii}(\mu)\,, \\ &64\, g_i(\mu)\, g_j(\mu) + g_i'(\mu)\, g_j'(\mu) = G_{ij}(\mu)\,, \\ &8 \cos 4\,\mu\, g_i(\mu) - \sin 4\,\mu\, g_i'(\mu) = G_i(\mu) \end{aligned}\right| \tag{33}$$

für alle vier Quadranten der Ausdruck

$$A_2 = 8\,a^4 \int_{\mu_B}^{\pi/4} \Big[\frac{1}{4}\,\varrho_R^4 + \frac{1}{2}\,a_4^2\,\varrho_R^6 - \frac{2}{3}\,a_4\,\varrho_R^6 \cos 4\mu - \frac{4}{5}\,\varrho_R^{10}\,(g_1 - a_0\,g_2 - a_4\,g_3) +$$

$$+ \frac{1}{64}\,\varrho_R^{16}\,(G_{11} + a_0^2\,G_{22} + a_4^2\,G_{33}) -$$

$$- \frac{1}{32}\,\varrho_R^{16}\,(a_0\,G_{12} + a_4\,G_{13} - a_0\,a_4\,G_{23}) + \frac{1}{6}\,\varrho_R^{12}\,(a_4\,G_1 - a_0\,a_4\,G_2 - a_4^2\,G_3) \Big]\, d\mu\,.$$

Die Funktionen $G(\mu)$ bilden wir punktweise und integrieren numerisch. Man erhält

$$A_2 = a^4\,(2{,}1246 + 4{,}1931\,a_0^2 + 0{,}2624\,a_4^2 - 1{,}4709\,a_0\,a_4 - 5{,}5463\,a_0 + 1{,}1169\,a_4)\,.$$

Die Integrale L_1 und L_2 werden

$$L_1 = 2 \iint f_1\,r\,dr\,d\mu = a^4\,(-1{,}9143 + 3{,}7981\,a_0 + 0{,}7716\,a_4)\,,$$
$$L_2 = 2 \iint f_2\,r\,dr\,d\mu = a^4\,(-0{,}6973 + 1{,}9434\,a_0 - 0{,}2002\,a_4)\,.$$

Für den Streifen längs der positiven x-Achse, dem wir hier den Index 3 zuordnen, wählen wir wie bisher den Ansatz (14), der jetzt lediglich mit der Größe $a = 2\,b$ dimensionslos zu machen ist. Für alle vier Streifen wird

$$\Pi_3 = b^4 \Big[-\frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) + \frac{\pi}{2}\,c_1^2\,e^{-2\pi} + \frac{3\,\pi}{2}\,c_3^2\,e^{-6\pi} + \frac{5\,\pi}{2}\,c_5^2\,e^{-10\pi} \Big]\,.$$

Die Stetigkeitsbedingung $f_1 = f_3$ in den Punkten $\xi = 1$; $\eta = 0$, $\eta = \pm 1/6$, $\eta = \pm 1/3$, $\eta = \pm 1/2$ ergibt

$$c_1\,e^{-\pi} = -7{,}4081 + 5{,}1006\,a_0 + 3{,}6660\,a_4\,,$$
$$c_3\,e^{-3\pi} = -1{,}1845 + 0{,}9792\,a_0 - 0{,}6002\,a_4\,,$$
$$c_5\,e^{-5\pi} = 0{,}1597 - 0{,}1366\,a_0 + 0{,}0840\,a_4\,.$$

Damit wird

$$\Pi_3 = b^4 \Big[-\frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) + 93{,}0172 + 45{,}5300\,a_0^2 + 22{,}8641\,a_4^2 +$$
$$+ 53{,}0253\,a_0\,a_4 - 129{,}9803\,a_0 - 78{,}4099\,a_4 \Big]\,.$$

Mit den Koeffizienten $a_0' = 10\,a_0$ und $a_4' = 10\,a_4$ erhält man für den Gesamtquerschnitt

$$\Pi = b^4 \Big[-\frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) + 215{,}7879 + 1{,}4194\,a_0'^2 + 0{,}6411\,a_4'^2 +$$
$$+ 0{,}2633\,a_0'\,a_4' - 37{,}0957\,a_0' - 9{,}3249\,a_4' \Big]\,.$$

Das Minimum ist durch $a_0' = 12{,}6339$, $a_4' = 4{,}6787$ gegeben. Damit wird die untere Schranke

$$J_t > b^4 \Big[40{,}357 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) \Big]\,.$$

Die Einschrankung lautet also

$$b^4 \Big[40{,}357 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) \Big] < J_t < b^4 \Big[40{,}676 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) \Big]$$

mit dem Mittelwert

$$\bar{J}_t = b^4 \Big[40{,}517 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 10{,}5) \Big]\,. \tag{34}$$

6. Andere Verhältnisse r_0/b. Nach denselben Methoden wurden noch zwei weitere Querschnitte berechnet. Für den Fall $r_0 = 4\,b$ wurde mit einem dreigliedrigen Ansatz die obere Schranke

$$J_t < b^4 \Big[272{,}996 + \frac{8}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - 22{,}5) \Big]\,.$$

Für $r_0 = b$ lag die obere Schranke mit ihrem Anteil für das Innengebiet lediglich um 0,5 % über dem Mittelwert. Wir können deshalb mit Sicherheit annehmen, daß die Abweichung bei dem Querschnitt mit $r_0 = 4\,b$ nicht größer ist und setzen den Mittelwert fest zu

$$\overline{J}_t = b^4 \left[272{,}0 + \frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 22{,}5) \right]. \tag{35}$$

Für den Querschnitt mit $r_0 = 7{,}34\,b$ ergab sich bei einem dreigliedrigen Ansatz für w die obere Schranke

$$J_t < b^4 \left[1149{,}0 + \frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 35{,}85) \right]$$

und daraus mit der Überlegung von oben der Mittelwert

$$\overline{J}_t = b^4 \left[1139{,}0 + \frac{8}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 35{,}85) \right]. \tag{36}$$

7. Der Vierbogenquerschnitt. a) Die untere Schranke. Es ist nun noch der Extremquerschnitt zu untersuchen, der nach Abb. 9 durch vier sich berührende Kreisbögen begrenzt ist. Für w wählen wir den zu den Achsen und den Diagonalen antimetrischen Ansatz

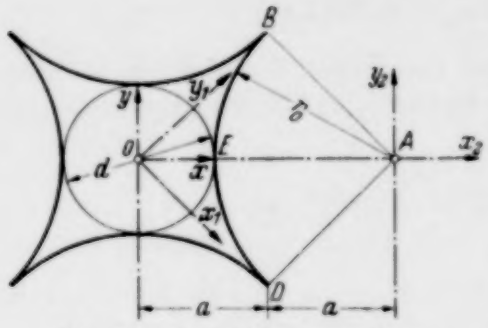


Abb. 9. Der Vierbogenquerschnitt.

$$\frac{w}{\theta} = \frac{1}{2} a^2 c\, Re\, i\, \zeta^4 = -\frac{1}{2} a^2 c\, \varrho^4 \sin 4\mu \tag{37}$$

mit den dimensionslosen Größen $\zeta = z/a$, $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\varrho = r/a$. Die Konstante c ergibt sich aus der Minimalbedingung für A. Die Rechnung wird nur mit einem eingliedrigen Ansatz durchgeführt, weil die Integration sehr umständlich ist und bei hohen Potenzen von ϱ Schwierigkeiten macht.

Aus (37) bilden wir nach (16)

$$A = a^4 \iint (\varrho^2 - 4\,c\,\varrho^4 \cos 4\mu + 4\,c^2\,\varrho^6)\, d\xi\, d\eta\,.$$

Das Integral berechnen wir erst über das Quadrat $ABOD$ und ziehen davon das Integral über den Kreissektor $ABED$ ab. Das Ergebnis ist wegen der Symmetrie mit vier zu multiplizieren:

$$A = 4\,a^4 \left\{ \iint\limits_{ABOD} [\cdots]\, d\xi\, d\mu - \iint\limits_{ABED} [\cdots]\, \varrho d\varrho\, d\mu \right\} \equiv 4\,a^4 \{J_1 - J_2\}.$$

Zur Berechnung von J_1 führen wir das gedrehte Koordinatensystem x_1, y_1, Abb. 9, ein. Wir erhalten

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} (\varrho_1^2 + 4\,c\,\varrho_1^4 \cos 4\mu_1 + 4\,c^2\,\varrho_1^6)\, d\xi_1\, d\eta_1 = \frac{8}{3} - \frac{128}{15} c + \frac{1536}{35} c^2\,. \tag{38}$$

Zur Berechnung von J_2 wird das Koordinatensystem x_2, y_2 von Abb. 9 eingeführt. Die Transformation ergibt für die Einzelglieder

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \varrho_2^2 + 4\,\varrho_2 \cos\mu_2 + 4\,, \\ \varrho^4 \cos 4\mu &= Re\,(\varrho_2\, e^{i\mu_2} + 2)^4\,, \\ \varrho^6 &= [(\varrho_2^2 + 4) + 2\,\varrho_2\,(e^{i\mu_2} + e^{-i\mu_2})]^3\,. \end{aligned}$$

Die Integration mit den Grenzen $\varrho_2 = 0$ bis $\varrho_2 = \sqrt{2}$ und $\mu_2 = \frac{3}{4}\pi$ bis $\mu_2 = \frac{5}{4}\pi$ liefert

$$J_2 = \frac{5}{2}\pi - \frac{16}{3} - c\left(32\pi - \frac{1376}{15}\right) + c^2\left(516\pi - \frac{165\,632}{105}\right). \tag{39}$$

Für A ergibt sich somit

$$A = 4\,a^4\,(0{,}1460 + 0{,}2642c + 0{,}2695\,c^2)\,. \tag{40}$$

Das Minimum liegt bei $c = -0{,}4902$. Damit wird $J_t < 0{,}3250 a^4$ und mit $d/2 = a\,(2 - \sqrt{2})$

$$J_t < 0{,}1725\,d^4\,.$$

Die Rechnung ist im Prinzip auch für einen mehrgliedrigen Ansatz durchführbar, jedoch ergeben sich dabei numerisch Schwierigkeiten. Alle Glieder von (40) sind Differenzen großer Zahlen, die nur dann genau bestimmt werden können, wenn die Rechnung bis zum Schluß in Brüchen durchgeführt wird. Da bei einem zweigliedrigen Ansatz ϱ schon in der 14. Potenz vorkommt, wird diese Methode nahezu undurchführbar. Das seither angewendete Verfahren, über ϱ analytisch von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \varrho_R$ und über μ numerisch zu integrieren, fällt hier weg, da die Ableitung $d\varrho_R/d\mu$ für $\mu = \pi/4$ unendlich wird. Die *Simpson*sche Regel ist dann ebenso wie graphische Integration nicht mehr anwendbar.

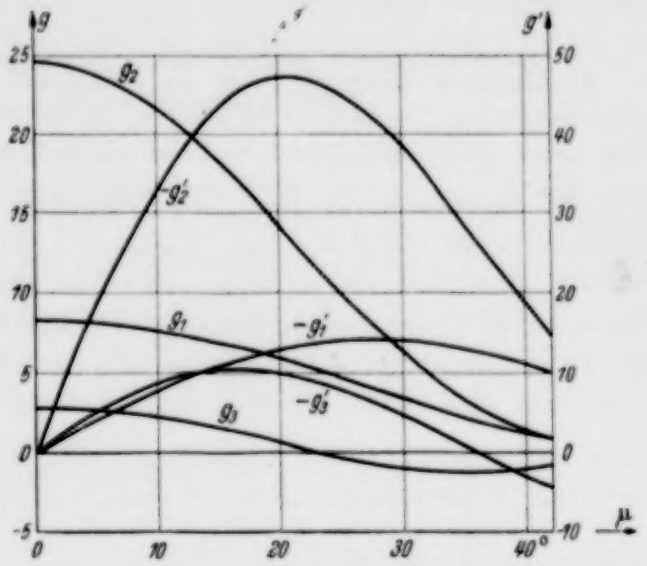


Abb. 10. Die Funktionen $g_i(\mu)$ und $g_i'(\mu)$ für den Vierbogenquerschnitt.

b) Die obere Schranke. Für den Ansatz $f(r, \mu)$ wählen wir dieselbe Form wie bei der Berechnung der oberen Schranke des Querschnittes nach Abb. 1b, also die Grundlösung $f_G = a^2(-\varrho^2 + a_0 + a_4 \varrho^4 \cos 4\mu)$ und Zusatzglieder, die zusammen mit f_G die Randbedingung (2) erfüllen.

Der Ansatz lautet

$$f(\varrho, \mu) = a^2 [-\varrho^2 + \varrho^6 g_1(\mu) + a_0 (1 - \varrho^6 g_2(\mu)) + a_4 (\varrho^4 \cos 4\mu - \varrho^6 g_3(\mu))]$$

mit

$$g_1(\mu) = 1/\varrho_R^4, \quad g_2(\mu) = 1/\varrho_R^6, \quad g_3(\mu) = \cos 4\mu/\varrho_R^2.$$

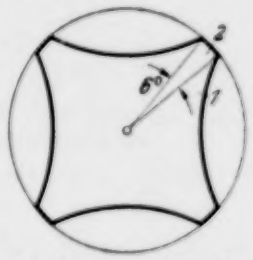


Abb. 11. Der vereinfachte Vierbogenquerschnitt.

Die Funktionen $g_i(\mu)$ und ihre Ableitungen $g_i'(\mu)$ sind in Abb. 10 aufgetragen. Die Singularität in den Ecken des Querschnittes wird einfach dadurch umgangen, daß man diese abschneidet und nach Abb. 11 durch einen Kreisbogen um O ersetzt. Innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen ist das ohne weiteres zulässig, da die Ecken zum Moment nur einen geringen Beitrag liefern würden, wie man sich mit dem *Prandtl*schen Seifenhautgleichnis anschaulich machen kann. Der Kreissektor mit dem Index 2 soll den Winkel von 6° umfassen. Der konstante Endhalbmesser wird dann $\varrho_e = 1{,}05897$.

Für den Bereich 1 erhält man mit den Abkürzungen (33) den Wert

$$A_1 = 8a^4 \int_0^{42°} \Big[\frac{1}{4} \varrho_R^4 + \frac{1}{2} a_4^2 \varrho_R^8 - \frac{2}{3} a_4 \varrho_R^6 \cos 4\mu - \varrho_R^8 (g_1 - a_0 g_2 - a_4 g_3) + \\ + \frac{1}{48} \varrho_R^{12} (G_{11} + a_0^2 G_{22} + a_4^2 G_{33}) - \\ - \frac{1}{24} \varrho_R^{12} (a_0 G_{12} + a_4 G_{13} - a_0 a_4 G_{23}) + \frac{1}{5} \varrho_R^{10} (a_4 G_1 - a_0 a_4 G_2 - a_4^2 G_3) \Big] d\mu$$

und nach der numerischen Integration über μ

$$A_1 = a^4 (2{,}1452 + 12{,}3048\, a_0^2 + 0{,}3462\, a_4^2 - 9{,}3138\, a_0 + 1{,}4328\, a_4 - 2{,}3488\, a_0 a_4).$$

Im Bereich 2 gestaltet sich die Rechnung wesentlich einfacher, da $\varrho_R = \varrho_e = \text{const}$ ist. Es ergibt sich

$$A_2 = a^4 (0{,}2740 + 0{,}5586\, a_0^2 + 0{,}1214\, a_4^2 - 0{,}4974\, a_0 a_4 - 0{,}7394\, a_0 + 0{,}3622\, a_4).$$

Die Integrale L_1 und L_2 werden

$$L_1 = 2 \iint f_1(r, \mu)\, r\, dr\, d\mu = 2a^4 (-0{,}1984 + 1{,}0808\, a_0 - 0{,}0224\, a_4)$$

und

$$L_2 = 2 \iint f_2(r, \mu)\, r\, dr\, d\mu = 2\, a^4 (-0{,}0584 + 0{,}1664\, a_0 - 0{,}0208\, a_4).$$

Für Π erhält man damit

$$\Pi = a^4 (2{,}9328 + 12{,}8634\, a_0^2 + 0{,}4676\, a_4^2 - 2{,}8462\, a_0 a_4 - 12{,}5476\, a_0 + 1{,}8814\, a_4)$$

mit dem Minimum für $a_0 = 0{,}3998$, $a_4 = -0{,}7951$. Die untere Schranke wird

$$J_t > 0{,}3233\, a^4 = 0{,}1716\, d^4.$$

Die Einschrankung lautet

$$0{,}1716\, d^4 < J_t < 0{,}1725\, d^4$$

mit dem Mittelwert

$$\overline{J_t} = 0{,}172\, d^4 \,. \tag{41}$$

8. Zusammenfassung. Für alle Fälle soll eine Näherungsformel aufgestellt werden. Als dimensionslose Veränderliche wählen wir das Verhältnis der Streifenbreite b zum Durchmesser d des dem Querschnitt einbeschriebenen Kreises. Nach Abb. 12 werden die Abkürzungen $\beta = b/d$, $\varrho_0 = r_0/b$, $\lambda_{12} = (l_1 + l_2)/b$ eingeführt. Die allgemeine Form der Mittelwerte $\overline{J_t}$ lautet damit

$$\overline{J_t} = d^4 \left[\overline{K}(\beta) + \frac{8}{3}\, \beta^4 (\lambda_{12} - 4\, \varrho_0 - 6{,}5) \right] . \tag{42}$$

Darin ist $\overline{K}(\beta)$ die noch unbekannte Funktion von β. In Tabelle 3 sind die Werte $\overline{K}(\beta)$ für die untersuchten Querschnitte zusammengestellt. Abb. 13 zeigt den Verlauf $\overline{K}(\beta)$. Durch die gegebenen fünf Punkte ist die Funktion ziemlich eindeutig festgelegt. Sie hat für $\beta \approx 0{,}2$ einen Wendepunkt und für $\beta = 0$ eine annähernd waagerechte Tangente. Zur Vereinfachung der Funktion verlangen wir deshalb, daß $\overline{K}(\beta)$ dort eine exakt waagerechte Tangente haben soll, ohne daß damit ein wesentlicher Fehler gemacht wird. Die Näherungsformel lautet dann bei einem algebraischen Ansatz $\overline{K}(\beta) = a_0 + a_2\, \beta^2 + a_3\, \beta^3 + a_4\, \beta^4$ nach Berechnung der Koeffizienten a_i

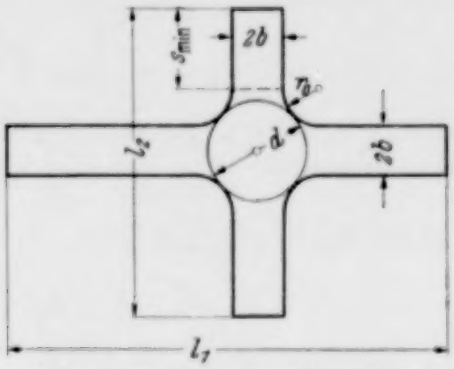


Abb. 12. Allgemeine Bezeichnungen für alle Querschnittsformen.

Tabelle 3.

Abb.	r_0	β	$\overline{K}(\beta)$
1c	a	0,0	0,172
1b	7,14 b	0,112	0,180
	4,00 b	0,163	0,190
	b	0,274	0,225
1a	0,0	0,354	0,247

$$\overline{J_t} = d^4 \left[0{,}172 + 0{,}306\, \beta^2 + 3{,}536\, \beta^3 - 7{,}644\, \beta^4 + \frac{8}{3}\, \beta^4 (\lambda_{12} - 4\, \varrho_0 - 6{,}5) \right] .$$

Trotzdem nur vier freie Koeffizienten gewählt wurden, sind alle fünf Punkte in der Formel enthalten. Verwendet man den Zusammenhang

$$\varrho_0 = \frac{1}{2\,(\sqrt{2} - 1)} \left(\frac{1}{\beta} - 2\sqrt{2} \right) ,$$

so wird

$$\overline{J_t} = d^4 \left[0{,}172 + 0{,}306\, \beta^2 - 9{,}340\, \beta^3 + \beta^4 \left(11{,}441 + \frac{8}{3}\, \lambda_{12} \right) \right] . \tag{43}$$

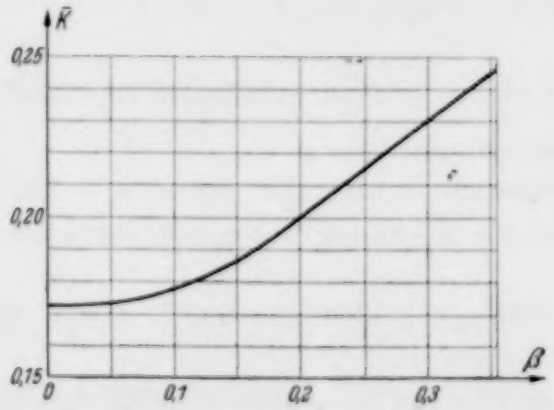


Abb. 13. Die Funktion $\overline{K}$ in Abhängigkeit von β.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Formel für alle Kreuzquerschnitte Gültigkeit hat, deren Streifen gleich breit sind und deren kleinste Streifenlänge s_{min} (Abb. 12) mindestens gleich $5\,b$ ist.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Günter Lein*, Heidenheim (Brenz), Walther Wolf-Str. 16.

Die Trägheitspolkurve der Schubstange eines zentrischen Schubkurbelgetriebes (Näherungslösung)

Von O. Tolle.

Nach *H. Winter*[1] versteht man unter dem Trägheitspol einer eben bewegten Scheibe für die augenblickliche Getriebestellung denjenigen Punkt $\mathfrak{T}$, durch welchen die Gesamtheit aller möglichen resultierenden Trägheitskräfte hindurchgeht. *K. Federhofer*[2] definiert in seiner Arbeit „Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes" die Trägheitspolkurve als den geometrischen Ort aller Trägheitspole der zwangsläufig geführten Scheibe im Verlaufe der verschiedenen Stellungen.

Für Getriebeglieder mit fester Drehachse M (z. B. Kurbel) ist die Trägheitspolkurve der Kreis, welcher der auf M bezogene Trägheitsmittelpunkt T_M (Schwingungsmittelpunkt) beschreibt.

Die Trägheitspolkurve eines geradlinig bewegten Gliedes (Schieber, Kreuzkopf) ist die Bahn seines Schwerpunktes.

Für die beliebig bewegte ebene Scheibe ist die Trägheitspolkurve im allgemeinen punktweise, d. h. der Trägheitspol für verschiedene Stellungen nach einem der nachstehenden zeichnerischen Verfahren zu bestimmen:

1. Zuhilfenahme des Geschwindigkeitspoles und des Wendepoles[3];
2. mit Hilfe von zwei beliebigen, mit dem Zwangslauf der Scheibe verträglichen, Beschleunigungszuständen[4] und Bestimmung der zugehörigen Trägheitskräfte nach *H. Alt*[5], *K. Federhofer*[6] oder *O. Tolle*[7];
3. Benutzung des Geschwindigkeitsplanes und eines beliebig angenommenen Beschleunigungsplanes[8];
4. Trennung der Beschleunigungen, die von der Winkelgeschwindigkeit herrühren, von denen, welche durch eine beliebige Winkelbeschleunigung der Scheibe bedingt sind, mit Hilfe eines Planes der relativen Normalbeschleunigungen[9].

Für den Sonderfall der Schubstange eines zentrischen Schubkurbelgetriebes mit Schwerpunkt S auf der Verbindungslinie von Kurbelzapfen K und Kreuzkopfbolzenmitte B hat *Federhofer*[2] die Trägheitspolkurve analytisch untersucht und auf S. 243 (7) folgende Gleichungen aufgestellt:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{\mathfrak{T}} &= -\frac{i_S^2}{r}\,\frac{\chi_1(\chi_1^3+\lambda\chi_1\cos^3\alpha-\lambda^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-\sigma\lambda^2\cos^3\alpha}{\sigma[\chi_1^3+\lambda(1-\sigma\lambda)\cos^3\alpha]}\,,\\ \eta_{\mathfrak{T}} &= -\frac{i_S^2}{r}\,\frac{\lambda\sin\alpha(\chi_1^3+\lambda\chi_1\cos^3\alpha-\lambda^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}{\sigma[\chi_1^3+\lambda(1-\sigma\lambda)\cos^3\alpha]}\,. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Das rechtwinklige Bezugsachsenkreuz (ξ, η) hat seinen Anfangspunkt (Abb. 1) im Schwerpunkt S, seine ξ-Achse fällt mit der Schubstangenrichtung zusammen. Es bedeuten ferner

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{\text{Kurbelhalbmesser}}{\text{Schubstangenlänge}} = \text{Stangenverhältnis},$$

α den Kurbelwinkel, β den Stangenerhebungswinkel, $\sin\beta = \lambda\sin\alpha$, $\chi_1 = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}$, s_2 den Abstand des Schwerpunktes S der Schubstange vom Kreuzkopfbolzenmittelpunkt B, s_1 den Abstand des Schwerpunktes S vom Kurbelzapfen K, $\sigma = s_2/r$, i_S den Trägheitshalbmesser, bezogen auf die senkrecht zur Stange durch S gehende Achse.

[1] *H. Winter*, Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 139 (1930).
[2] *K. Federhofer*, Österr. Ing.-Arch. 5 (1951), S. 240.
[3] *R. Beyer*, Masch.-Bau (RM-Afg.) 3 (1935), S. 642.
[4] *A. Kraus*, Masch.-Bau (RM-Afg.) 4 (1936), S. 337.
[5] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 58.
[6] *K. Federhofer*, ZVDI 74 (1930), S. 234.
[7] *O. Tolle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 377; ebenda 19 (1951), S. 355.
[8] *G. Gerber*, Masch.-Bau (Beil. Getriebetechnik) 8 (1940), S. 533.
[9] *M. Tolle*, ZVDI 76 (1932), S. 799.

Für technische Zwecke genügt es fast immer in einem Schubkurbelgetriebe die Glieder mit dem Faktor λ^2 wegzulassen, folglich auch $\chi_1 = \cos\beta = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\sigma} = 1$ zu setzen.

Für $\lambda^2 = 0$ und $\chi_1 = 1$ gehen daher die *Federhofer*schen Gleichungen über in

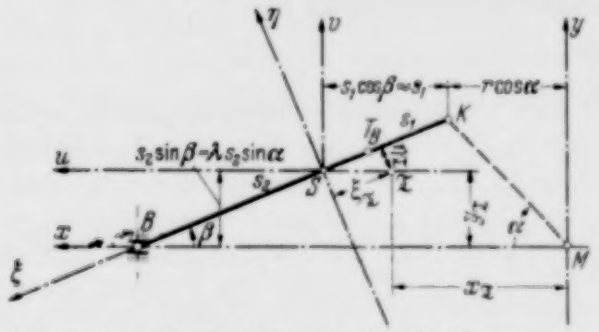


Abb. 1. Lage des Trägheitspoles der Schubstange eines zentrischen Schubkurbelgetriebes in verschiedenen Koordinatensystemen.

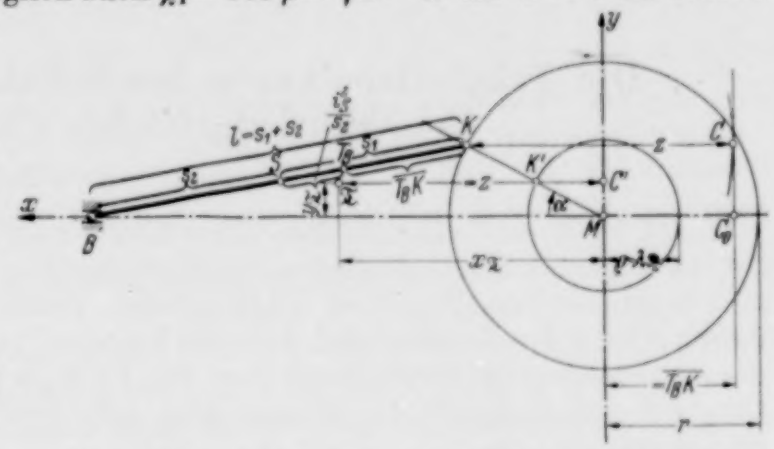


Abb. 2. Zeichnerische Ermittlung des Trägheitspoles für $\lambda^2 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \xi_\Sigma &= -\frac{i_S^2}{r}\,\frac{1+\lambda\cos^3\alpha}{s_2/r\,(1+\lambda\cos^3\alpha)} = -\frac{i_S^2}{s_2}\,, \\ \eta_\Sigma &= -\frac{i_S^2}{r}\,\frac{\lambda\sin\alpha\,(1+\lambda\cos^3\alpha)}{s_2/r\,(1+\lambda\cos^3\alpha)} = -\lambda\,\frac{i_S^2}{s_2}\sin\alpha\,. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Das Achsenkreuz (ξ, η) hat für jede Getriebestellung eine andere Lage. Wählt man durch Koordinatenumwandlung (gleichzeitige Drehung und Verschiebung) ein neues feststehendes rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y), dessen Anfangspunkt im Kurbelwellenmittelpunkt M gelegen ist, so ergibt sich

1. infolge Drehung um den Winkel β

$$\left.\begin{aligned} u_\Sigma &= \xi_\Sigma\cos\beta + \eta_\Sigma\sin\beta = -\frac{i_S^2}{s_2} - \frac{\lambda^2 i_S^2}{s_2}\sin^2\alpha = -\frac{i_S^2}{s_2} = \xi_\Sigma\,, \\ v_\Sigma &= -\xi_\Sigma\sin\beta + \eta_\Sigma\cos\beta = +\frac{i_S^2}{s_2}\lambda\sin\alpha - \frac{i_S^2}{s_2}\lambda\sin\alpha = 0\,, \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

2. infolge Parallelverschiebung

$$\left.\begin{aligned} x_\Sigma &= r\cos\alpha + s_1\cos\beta + u_\Sigma = r\cos\alpha + s_1 - \frac{i_S^2}{s_2} = r\cos\alpha + \overline{T_BK}\,, \\ y_\Sigma &= s_2\sin\beta + v_\Sigma = s_2\sin\beta = \lambda\, s_2\sin\alpha\,. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Für die Bestimmung des Trägheitspoles $\mathfrak{T}$ der Schubstange in einer beliebigen Kurbelstellung ergibt sich aus den so gefundenen Koordinatengleichungen für x_Σ und y_Σ folgende graphische Lösung nach Abb. 2: Man zeichnet außer dem Kurbelkreis einen zweiten Kreis mit $\varrho = \lambda s_2$ als Halbmesser und errichtet im Abstand $\overline{MC_0} = \overline{T_BK} = s_1 - i_S^2/s_2$ von der y-Achse aus die Senkrechte auf die Schubrichtung des Kreuzkopfes. Die von M ausgehenden Kurbelstellungen schneiden den Kurbelkreis in den Punkten K und den Kreis vom Halbmesser ϱ in den Punkten K'. Die Parallele zur x-Achse durch K' schneidet die y-Achse im Punkt C'; der gesuchte Trägheitspol $\mathfrak{T}$ für die jeweilige Kurbelstellung liegt auf dieser Parallelen im Abstand $Z = \overline{KC} = \overline{C'\mathfrak{T}} = x_\Sigma$ von der y-Achse aus. Denn nach Abb. 2 ist $\overline{KC} = r\cos\alpha + \overline{T_BK} = Z = \overline{C'\mathfrak{T}} = x_\Sigma$ und $\overline{C'M} = \varrho\sin\alpha = \lambda s_2\sin\alpha = y_\Sigma$.

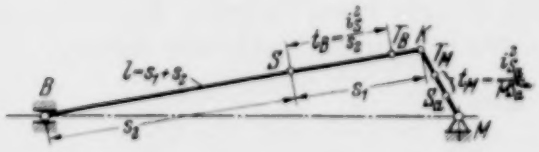


Abb. 3. Erläuterungsskizze für ein Beispiel: Bestimmung der Trägheitspolkurven eines zentrischen Schubkurbelgetriebes.

Die Koordinaten x_Σ und y_Σ des Trägheitspoles $\mathfrak{T}$ für $\lambda^2 = 0$ im rechtwinkligen Achsenkreuz (x, y) sind also Funktionen des Kurbelwinkels α und für die angenäherte Trägheitspolkurve die Parametergleichung einer Ellipse, deren Halbachsen $a = r$ und $b = \lambda s_2$ sind, und deren Mittelpunkt M_Σ die Koordinaten $x_{M\Sigma} = \overline{T_BK} = s_1 - i_S^2/s_2$ und $y_{M\Sigma} = 0$ besitzt.

Ein Beispiel für die Trägheitspolkurven eines zentrischen Schubkurbelgetriebes zeigen Abb. 3 und 3a. Die gegebenen Stücke veranschaulicht Abb. 3. Es sind bekannt

$\lambda = r/l = 1/5$, ferner für die Kurbel der Schwerpunktabstand $\overline{MS_a}$ und ihr Trägheitshalbmesser i_{Sa}, bezogen auf die senkrecht zur Kurbel stehende Schwerachse, für die Schubstange $s_1 = 0{,}35\,l$, $s_2 = 0{,}65\,l$, und $i_S = 0{,}424\,l$.

1. Die Trägheitspolkurve der Kurbel ist der Kreis, welchen der auf den Kurbelwellenmittelpunkt M bezogene Trägheitsmittelpunkt T_M beschreibt; sein Halbmesser ist $r_a = \overline{MS_a} + i_{Sa}^2/\overline{MS_a}$ (in Abb. 3a nicht eingezeichnet).

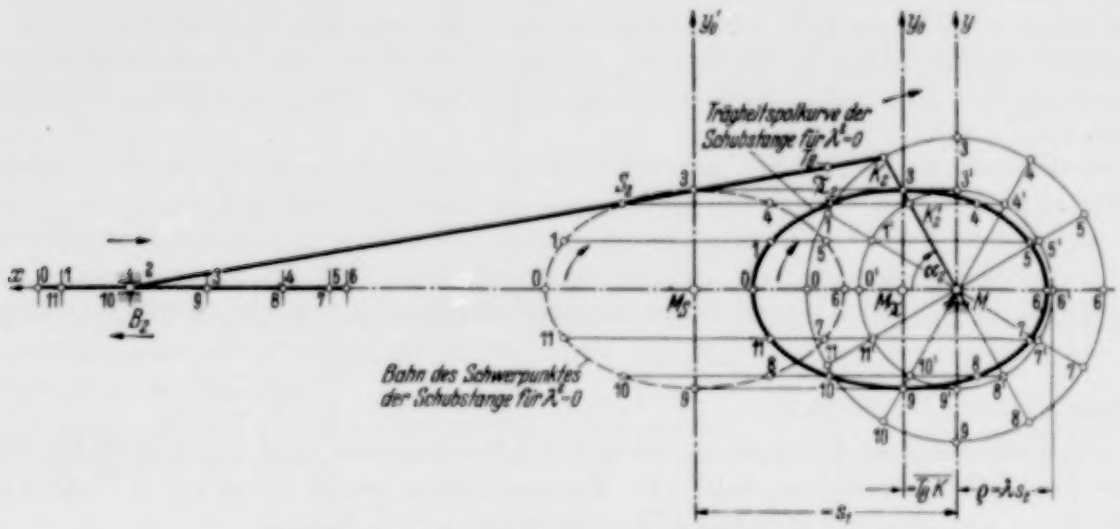


Abb. 3a. Trägheitspolkurve der Schubstange für $\lambda^2 = 0$.

2. Die Trägheitspolkurve des Kreuzkopfes ist dessen Weg, und man findet die zu jeder Kurbelstellung zugehörige Kreuzkopfstellung in bekannter Weise zeichnerisch oder rechnerisch.

3. Für (x, y_0) als Hauptachsenkreuz, bei welchem der Abstand der Achsen y_0 und y, im Beispiel $\overline{T_B K} = s_1 - i_S^2/s_2 = 0{,}35\,l - 0{,}18\,l^2/0{,}65\,l = 0{,}278\,l$ beträgt, kann nach einer der bekannten Ellipsenkonstruktionen für die Halbachsen $a = r = 0{,}2\,l$ und $b = \lambda\, s_2 = 0{,}13\,l$ die angenäherte Trägheitspolkurve der Schubstange leicht gezeichnet werden. Die Parallele zur x-Achse durch K' schneidet die Ellipse in dem der jeweiligen Kurbelstellung (z. B. α_2) entsprechenden Trägheitspol $\mathfrak{T}_2$.

Die Bahn des Schubstangen-Schwerpunktes ist bei der Annahme $\lambda^2 = 0$ ebenfalls eine Ellipse und zwar von derselben Form und Größe wie die angenäherte Trägheitspolkurve; ihr Mittelpunkt M_S liegt auf der x-Achse von M aus im Abstand $\overline{MM_S} = s_1$. (Die wirkliche Bahn des Schwerpunktes für $\lambda = \lambda$ ist eine Kurve vierten Grades mit der x-Achse als Symmetrielinie.)

(Eingegangen am 5. März 1953.)

Anschrift des Verfassers: Baurat Dipl.-Ing. *O. Tolle*, Konstanz (Bodensee), Bahnhofplatz 10.

Über die Gesetze der Kornverteilung bei Zerkleinerungsvorgängen.

Von K. Stange.

1. Einführung; Aufgabenstellung. Bei der technischen Verwendung zerkleinerter fester Stoffe spielt ihre Kornverteilung eine wichtige Rolle; sei es, daß man diese Stoffe bis zu einem gewissen Grad zerkleinern will, um sie gut miteinander mischen zu können; sei es, daß man aus dem Grad der erreichten Zerkleinerung auf die vorhandene Oberfläche schließen will, weil etwa Reaktionszeit, Ausbeute oder Güte bei dem Erzeugnis eines chemischen Vorganges davon abhängen.

Für eine außerordentlich große Zahl technisch wichtiger „Mahlgüter" (Kohlenstaub, Zement, Quarz, Metallpulver und viele andere) läßt sich die Kornverteilung über einen ausgedehnten Bereich des Korndurchmessers hinweg mit guter Näherung durch die Formel von *Rosin*, *Rammler* und *Sperling* darstellen [1]. Sie gibt den auf einem Sieb der Maschenweite x beim Absieben zurückbleibenden Rückstand R (bezogen auf das Gesamtgewicht) durch das Exponentialgesetz

$$R = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^n}, \tag{1.1}$$

wobei a einen die Feinheit kennzeichnenden Korndurchmesser und n ein Maß für die Gleichmäßigkeit der Zerkleinerung darstellt. Im Körnungsnetz, in dem $\log\log R^{-1}$ über $\log x$ dargestellt wird, ist das Bild der Funktion (1.1) wegen

$$\ln\ln R^{-1} = n(\ln x - \ln a) \tag{1.2}$$

eine Gerade.

Diese Eigenschaft erleichtert die Handhabung, insbesondere die Bestimmung der beiden Parameter a und n so weitgehend, daß die RRS-Formel in der Praxis wohl auch dann ihren Platz behaupten wird, wenn sie kein Gesetz, sondern nur eine brauchbare Interpolationsformel zur Erfassung eines versuchsmäßig gegebenen Tatbestandes darstellt, eine Möglichkeit, die *Rammler* stets im Auge behalten hat. Die Formel (1.1) ist im großen ganzen aus der Erfahrung herausgewachsen [2]. Die in diesem Zusammenhang von *Fehling* durchgeführten wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen, die *Rammler* [2] erwähnt, sind meines Wissens nicht veröffentlicht worden. Die von *Bennett* [3] gegebene theoretische Begründung befriedigt (jedenfalls in der dem Verfasser bekannt gewordenen zusammenfassenden Darstellung von *Rammler*) auch nicht recht. Die Frage ist kürzlich von *Manning* [4] mit Erfolg wieder aufgegriffen worden. Die folgenden Ausführungen sollen ebenfalls ein Beitrag zu der Frage nach dem theoretisch zu erwartenden Kornverteilungsgesetz sein. Für zwei sehr einfache Zerkleinerungsvorgänge I und II werden wir die Kornverteilungen berechnen. Der Vorgang II entspricht dem von *Manning* (in etwas anderer Weise) behandelten Fall. Es ist von vornherein zu erwarten, daß die entstehende Verteilung wesentlich von der Art des Zerkleinerungsvorgangs abhängt. Es gibt also kein in allen Fällen zutreffendes Verteilungsgesetz, worauf schon *Rammler* [5] auf Grund zahlreicher Beobachtungsergebnisse hingewiesen hat.

Das Ausgangsgut sei gleichkörnig und enthalte N_0 Körner vom Gewicht γ_0. Das Gesamtgewicht ist dann $G^* = N_0\,\gamma_0$. Die beiden Zerkleinerungsvorgänge I und II kennzeichnen wir durch die folgenden Vorschriften

I

Jedes Korn γ_0 wird zufallsmäßig in zwei Teile zerspalten. Dieser Vorgang wird mit allen Körnern $p$mal wiederholt. Dieses Modell ist einem langsam ablaufenden Zerkleinerungsvorgang angepaßt. Ob es wirkliche Verhältnisse bei einem Mahlvorgang erfaßt, mag zunächst offen bleiben.

II

Jedes Korn γ_0 wird zufallsmäßig in k Teile zerspalten. Dieses Modell entspricht in etwa einem Zerkleinerungsvorgang, bei dem jedes Ausgangskorn γ_0 einmal der Wirkung einer zerstörenden Kraft ausgesetzt wird, die so groß ist, daß das Korn in zahlreiche Teile zerfällt, die dann praktisch nicht mehr beeinflußt werden.

[1] *E. Rammler*, Z. VDI-Beiheft Verfahrenstechnik (1937), S. 161, [1] und (1940), S. 6, [2].
[2] *E. Rammler* [1], S. 163 und 164.
[3] *J. G. Bennett*, J. Inst. Fuel (1936), S. 22.
[4] *A. B. Manning*, J. Inst. Fuel (1952), S. 1.
[5] *E. Rammler* [1], S. 163, Bild 3.

Am Ende der Zerkleinerung sind insgesamt

$$N^* = 2^p N_0 \qquad \text{bzw.} \qquad N^* = k N_0 \tag{1.3}$$

Teilchen vorhanden. Die den Grad der Zerkleinerung kennzeichnenden Zahlen p und k seien genügend groß. Beide Vorschriften führen zu unterschiedlichen Verteilungsgesetzen für die Korngewichte γ (bzw. die Korndurchmesser x).

2. Die zufallsmäßige Zerkleinerung einer Größe L_0. Abb. 1 zeigt die Ausgangsgröße L_0 und eine Reihe von möglichen Teilungen in die Stücke $(L_1'; L_2')$; $(L_1''; L_2'')$ usw. Wir wählen die Bezeichnung der Teilstücke so, daß stets $L_2 \leq L_1$ ist. Der Begriff der zufallsmäßigen Zerkleinerung soll zwei Voraussetzungen erfüllen: (a) Es soll vom Zufall abhängen, an welcher Stelle die Aufspaltung in L_1 und L_2 eintritt. (b) Alle Stellen von L_0 seien bezüglich der Zerkleinerung gleichberechtigt. Zerkleinern wir sehr viele Elemente L_0 in der angegebenen Weise und ordnen die Teilstücke so, daß das kleinere L_2 stets links liegt, so verteilen sich die Punkte (↓) unter den eben genannten Voraussetzungen gleichmäßig über den Bereich von 0 bis $L_0/2$.

Abb. 1. Zur zufallsmäßigen Zerkleinerung einer Größe L_0 in zwei Teilstücke L_1 und $L_2 < L_1$.

Die Erwartungswerte L_2 und L_1 der kleinen und großen Teilstücke von L_0 sind demnach

$$L_2 = \frac{1}{4} L_0 = \frac{L_0}{2}\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad L_1 = \frac{3}{4} L_0 = \frac{L_0}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right). \tag{2.1}$$

Im Abschnitt 7 werden wir das dem allgemeinen Fall entsprechende Ergebnis heranziehen müssen.

3. Das Verteilungsgesetz der Korngewichte für den Zerkleinerungsvorgang I. Der erste Schritt des Zerkleinerungsvorgangs I erzeugt also „im Mittel" aus N_0 Teilchen vom Gewicht γ_0 je N_0 kleinere mit den Gewichten $\gamma_2 = \gamma_0/4$ und $\gamma_1 = 3\,\gamma_0/4$, wie es Abb. 2 zeigt. Setzt man das Verfahren fort, so hat man nach p Schritten insgesamt $N^* = 2^p N_0$ Teilchen mit

den relativen Gewichten	$\frac{\gamma}{\gamma_0}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^p$,	$\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}\left(\frac{3}{4}\right)$,	$\left(\frac{1}{4}\right)^{p-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2$,	. . .	$\left(\frac{3}{4}\right)^p$
und den „relativen Häufigkeiten"	$2^p \frac{N}{N^*}$	$\binom{p}{0}$,	$\binom{p}{1}$,	$\binom{p}{2}$	. . .	$\binom{p}{p}$.

Man erkennt, daß mit wachsender Schrittzahl das Maximum der Verteilung nach links zu kleineren Teilchen wandert, und daß sich der Gesamtbereich, über den sich die Verteilung erstreckt, mehr und mehr zusammenzieht. Nach p Schritten ist das Korngewicht $\gamma_{p+1-\nu}$ an der Stelle ν

$$\gamma_{p+1-\nu} = \frac{3^\nu}{4^p}\gamma_0, \quad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p). \tag{3.1}$$

Das in der Mitte liegende Korngewicht γ_M ist bei genügend großem p (so daß wir zwischen ungeraden und geraden Werten von p nicht zu unterscheiden brauchen)

$$\gamma_M = \frac{3^{p/2}}{4^p}\gamma_0. \tag{3.2}$$

Damit gilt für das laufende Korngewicht γ (bei dem wir den Index $p + 1 - \nu$ schließlich weglassen)

$$\frac{\gamma}{\gamma_M} = 3^{\nu - \frac{p}{2}}. \tag{3.3}$$

Für genügend großes p dürfen wir die nach Abb. 3 über dem Bereich

$$-\frac{p}{2} \leq \left(\nu - \frac{p}{2}\right) \leq +\frac{p}{2} \tag{3.4}$$

liegende binomische Verteilung durch eine Normalverteilung ersetzen. Da nach (3.3)

$$\ln(\gamma/\gamma_M) = \left(\nu - \frac{p}{2}\right)\ln 3 = y \tag{3.5}$$

ist, so sind die Logarithmen der Korngewichte γ verhältnisgleich zu $\left(\nu - \frac{p}{2}\right)$. Der Zerkleinerungsvorgang I liefert demnach für die Teilchengewichte γ in erster Näherung eine logarithmisch-normale Verteilung.

4. Der Siebdurchgang D. Wir setzen die für $y = \ln(\gamma/\gamma_M)$ geltende Normalverteilung in die Gestalt

$$d\left(\frac{N}{N^*}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2} d\left(\frac{y}{\sigma_y}\right). \tag{4.1}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß die y-Werte nach dem Vorausgehenden den Mittelwert $\mu_y = 0$ haben. Mit σ_y^2 bezeichnen wir die Streuung der y-Werte. Die Verteilung wird also durch die zwei Parameter γ_M und σ_y gekennzeichnet.

Gleichung (4.1) bringt die relative Teilchenzahl N/N^* letzten Endes mit dem Korngewicht γ in Verbindung. Das ist die bei statistischen Untersuchungen übliche Verknüpfung. In der Technik beschreibt man Kornverteilungen jedoch in etwas anderer Weise. Man gibt die Gewichtsverteilung G/G^* über dem Korndurchmesser x in Form der Siebrückstands- oder Siebdurchgangskurven. Der Grund ist einleuchtend. Während man den Zusammenhang

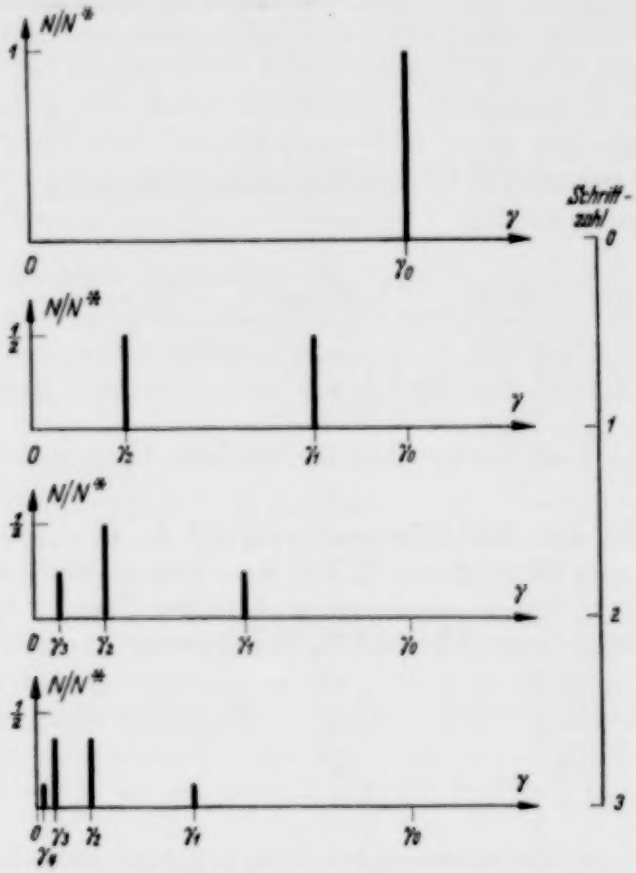


Abb. 2. Die Anfangsschritte bei der Entstehung der Kornverteilung N/N^* über γ. Dargestellt sind nur die Erwartungswerte der Teilstücke mit den ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten.

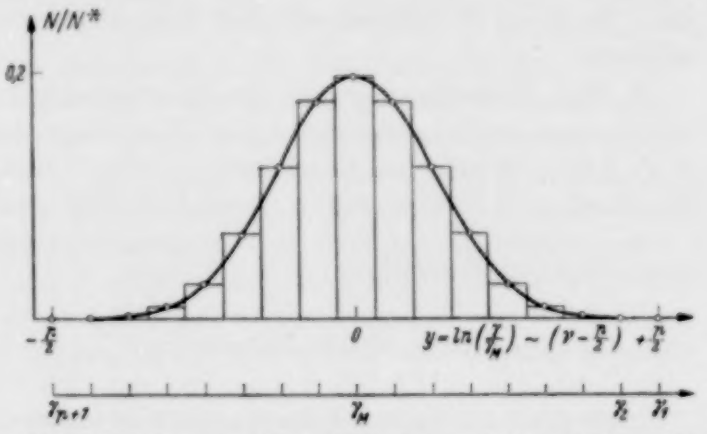


Abb. 3. Die Kornverteilung N/N^* über $y = \ln(\gamma/\gamma_M)$ für $p = 16$. Dargestellt sind wie in Abb. 2 nur die Erwartungswerte der Teilstücke mit den ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten. Die untere waagerechte Teilung für γ ist als Funktionsteilung zu denken.

zwischen G/G^* und x bzw. γ meßtechnisch einfach bestimmen kann (z. B. durch eine Siebanalyse oder andere gleichwertige Verfahren), ist das Auszählen der Teilchen zwar nicht unmöglich, erfordert aber so hohen Aufwand, daß man diesen Weg nur in Sonderfällen beschritten hat.

Gleichung (4.1) läßt sich mit Hilfe von

$$dG = \gamma\, dN \tag{4.2}$$

leicht auf die gewünschte Gestalt umrechnen. Man findet mit

$$\frac{\gamma}{\gamma_M} = e^y \tag{4.3}$$

nach einfacher Umformung des Exponenten zunächst

$$d(G/G^*) = dD = \left(\frac{\gamma_M}{\bar{\gamma}} e^{\frac{1}{2}\sigma_y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\eta - \sigma_y)^2} d(\eta - \sigma_y), \tag{4.4}$$

wobei

$$\eta = \frac{y}{\sigma_y} \qquad \text{und} \qquad \bar{\gamma} = \frac{G^*}{N^*} \tag{4.5}$$

ist. Dabei ist $\bar{\gamma}$ das mittlere Teilchengewicht bezüglich der Teilchenzahl N^*, und η ist das zur Streuung $\sigma_\eta^2 = 1$ normierte Merkmal y.

Da der Gesamtdurchgang

$$D^* = \left(\frac{\gamma_M}{\bar{\gamma}}\, e^{\frac{1}{2}\,\sigma_y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\,\tau^2}\, d\tau = 1$$

ist, so gilt für den konstanten Faktor in (4.4)

$$\frac{\gamma_M}{\bar{\gamma}}\, e^{\frac{1}{2}\,\sigma_y^2} = 1\,. \tag{4.6}$$

Damit erhält man schließlich

$$dD = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\,(\eta-\sigma_y)^2}\, d(\eta-\sigma_y) = \varphi(\eta-\sigma_y)\, d(\eta-\sigma_y) = \varphi(\tau)\, d\tau\,, \tag{4.7}$$

wenn mit $\varphi(\tau)$ die (zum Mittelwert 0 und zur Streuung 1) normierte Normalverteilung über $\tau = \eta - \sigma_y$ bezeichnet wird.

Über der geeignet zu wählenden dimensionslosen Veränderlichen

$$\tau = \frac{1}{\sigma_y}\ln\left(\frac{\gamma}{\gamma_M}\right) - \sigma_y = \frac{1}{\sigma_y}\ln\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) - \frac{\sigma_y}{2} = A\ln\gamma - B \tag{4.8}$$

ist die Durchgangsdichte $(dD/d\tau)$ eine normierte Normalverteilung. Infolgedessen wird ihre Summenlinie $D(\tau)$ im Wahrscheinlichkeitsnetz mit logarithmischer Merkmalteilung durch eine Gerade dargestellt. Da das Gewicht kugelförmiger Teilchen $\gamma = (\pi/6)\, s\, x^3$ ist, so wird $\ln\gamma = 3\ln x + C$. Es ist demnach bei logarithmisch-normalen Kornverteilungen ganz gleichgültig, ob man als kennzeichnendes Merkmal das Gewicht γ oder den Durchmesser x der Teilchen wählt. Außerdem ist es belanglos, ob man an Stelle der bisher gewählten natürlichen Logarithmen die auf die Basis 10 bezogenen benutzt.

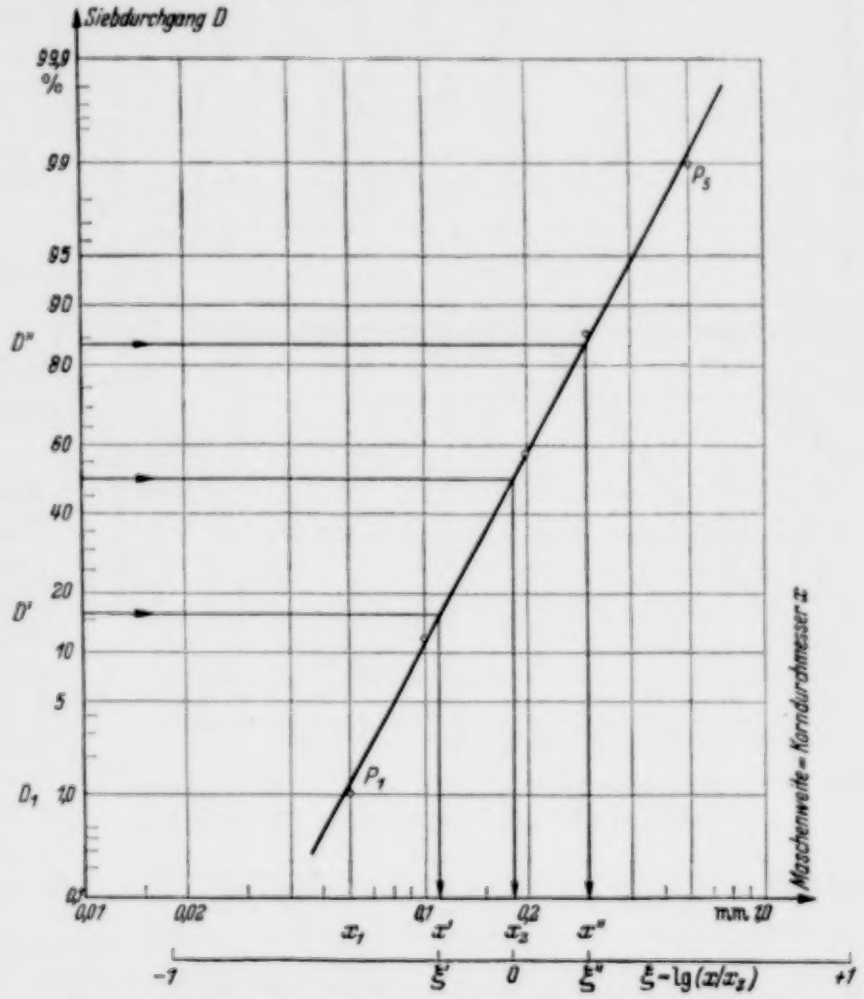


Abb. 4. Der Siebdurchgang D über der Maschenweite x im Wahrscheinlichkeitsnetz mit logarithmischer Merkmalteilung. Zeichnerische Ermittlung der kennzeichnenden Parameter x_z und $\sigma_\xi = 1/2\,(\xi'' - \xi')$.

5. Die Einführung meßtechnisch leicht zugänglicher Parameter. Von diesen Tatsachen gehen wir aus, um die bisher benutzten Parameter γ_M und σ_y der Verteilung durch solche Parameter zu ersetzen, die der Messung unmittelbar zugänglich sind. Gegeben sei also in Abb. 4 die Siebrückstandskurve $R(x)$ bzw. die für unsere Zwecke etwas bequemere Durchgangskurve $D(x) = 1 - R(x)$ im Wahrscheinlichkeitsnetz mit logarithmischer Merkmalteilung. Sie entsteht, indem wir durch die Meßpunkte $P_\lambda\ (x_\lambda,\ D_\lambda)$ eine ausgleichende Gerade legen. Die Gerade bestimmt bei $D = 1/2$ den Zentralwert x_z der Kornverteilung und damit auch den Zentralwert

$$\gamma_z = \frac{\pi}{6}\, s\, x_z^3 \tag{5.1}$$

der Korngewichte. Die beiden Werte $D' = 0{,}159$ und $D'' = 0{,}841$ geben auf Grund einer be-

kannten Eigenschaft der Normalverteilung die Streuung σ_ξ^2 bzw. die Standardabweichung σ_ξ durch

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\xi'' - \xi') = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{x''}{x'}\right) = \frac{1}{6}\lg\left(\frac{\gamma''}{\gamma'}\right). \tag{5.2}$$

Der Korndurchmesser x_z bzw. das ihm zugeordnete Korngewicht γ_z ist dadurch ausgezeichnet, daß die eine Hälfte der Verteilung (dem Gewicht nach) aus feineren und die andere aus gröberen Körnern als x_z bzw. γ_z besteht. Auf einem Sieb mit der Maschenweite x_z bleibt demnach die Hälfte des Gewichts als Rückstand liegen.

Für das in Abb. 4 eingezeichnete Beispiel ist $x_z = 0{,}18$ mm und $\sigma_\xi = 0{,}218$. Die Meßpunkte entsprechen der Siebanalyse von Eisenberger Quarzsand S II [1].

Manche Formsande (wie das Beispiel) geben recht gut eine logarithmisch-normale Verteilung; andere weichen erheblich davon ab. Bei zahlreichen in dem unten genannten Buch zusammengestellten Analysen reicht die Genauigkeit nicht aus, um die Entscheidung zu treffen. Wenn etwa für die letzte, in einer Verteilung wirklich vorkommende Kornklasse 0,3 mm bis 0,6 mm der Wert 28 % genannt wird, so mag diese Angabe ausreichen, um den Sand nach seiner Brauchbarkeit in der Gießerei zu beurteilen. Die grobe Einteilung genügt aber nicht, um die notwendigen Punkte P_λ der Summenlinie so genau festzulegen, daß man entscheiden kann, ob eine logarithmisch-normale Verteilung vorliegt oder nicht.

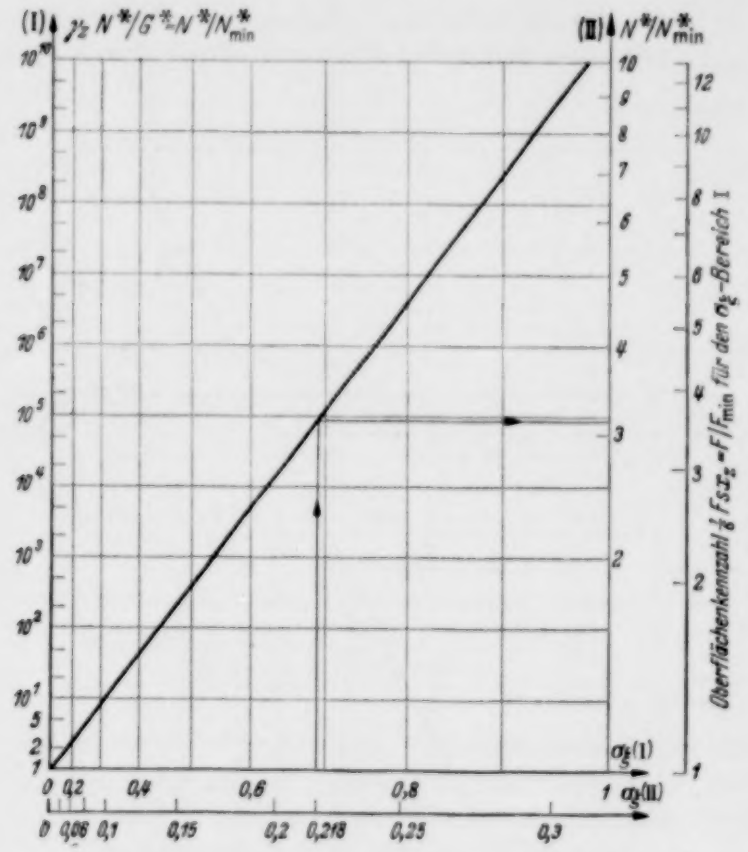


Abb. 5. Zur Ermittlung der Kennzahlen N^*/N^*_{min} für die bezogene Teilchenzahl und F/F_{min} für die bezogene Oberfläche.

Mit Hilfe der oben eingeführten Parameter x_z (bzw. γ_z) und σ_ξ wird die Durchgangsdichte eine normierte Normalverteilung über der Veränderlichen

$$t = \frac{\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\lg(x/x_z)}{\sigma_\xi} = \frac{\lg(\gamma/\gamma_z)}{3\,\sigma_\xi}. \tag{5.3}$$

Vergleicht man (5.3) mit (4.8), so gewinnt man unmittelbar die Gleichungen

$$\sigma_y = 3 \ln 10\, \sigma_\xi \tag{5.4}$$

und

$$\gamma_M = \gamma_z\, e^{-(3 \ln 10\, \sigma_\xi)^2}, \tag{5.5}$$

welche die alten Parameter (γ_M; σ_y mit den neuen (γ_z, σ_ξ) verknüpfen.

6. Die Kennzahlen für den Zerkleinerungsgrad und die bezogene Oberfläche. Ein anschauliches Maß für die erreichte Zerkleinerung ist die bezogene Kornzahl N^*/G^*, d. h. die Zahl der Körner je kg Mahlgut. Die bei einem gegebenen Zerkleinerungsgrad vorhandene bezogene Oberfläche F, d. h. die Oberfläche je kg Mahlgut, messen wir durch die dimensionslose Oberflächenkennzahl $F s x_z/6$. Beide Kennwerte wollen wir durch die oben eingeführten Parameter (x_z, γ_z, σ_ξ) ausdrücken. Aus (4.6) und (5.5) folgt

$$\frac{\gamma_z N^*}{G^*} = \frac{\gamma_z}{\bar{\gamma}} = e^{\frac{1}{2}(3 \ln 10\, \sigma_\xi)^2}. \tag{6.1}$$

Für $\sigma_\xi = 0$ liegt gleichkörniges Gut vom Korngewicht $\gamma = \text{konst.} = \gamma_z$ vor. Dann gibt (6.1) einfach $N^* \gamma_z = G^*$, wie es sein muß. Mit zunehmender Streuung σ_ξ wächst die dimensionslose Kennzahl $\gamma_z N^*/G^*$ für den Zerkleinerungsgrad rasch an, was auch anschaulich klar ist (Abb. 5). Schiebt man nämlich je n Teilchen vom Gewicht γ_z „spiegelbildlich" zu γ_z nach rechts und

[1] *W. Magers* und *E. Wagner*, Untersuchungsergebnisse von Gießerei-Quarzsanden, S. 11, Düsseldorf 1952. — Der Sand (nach DIN 52 401) stammt aus den Sand- und Tonwerken Kriegsheim, Eisenberg (Pfalz).

links hinaus nach $\gamma_R = \varkappa\gamma_z$ bzw. $\gamma_L = (1/\varkappa)\,\gamma_z$, so entstehen daraus $n/\varkappa$ bzw. $n \cdot \varkappa$ Teilchen. Die durch diese Maßnahme zusätzlich entstehende Teilchenzahl ist

$$\left(\frac{n}{\varkappa} + n\varkappa\right) - 2\,n = \frac{n}{\varkappa}\,(\varkappa - 1)^2 > 0\,.$$

Bei gegebenem γ_z hat gleichkörniges Gut demnach die kleinste Teilchenzahl

$$N^*_{min} = \frac{G^*}{\gamma_z}\,. \tag{6.2}$$

Für die eingangs genannte Oberflächenkennzahl kugelförmiger Teilchen liefert eine einfache Rechnung, die nicht in allen Einzelheiten hingeschrieben werden soll, die Beziehung

$$\frac{1}{6}\,F\,s\,x_z = e^{\frac{1}{2}\,(\ln 10\,\sigma_\xi)^2}\,. \tag{6.3}$$

Die beiden Kennzahlen sind wegen (6.1) durch die Beziehung

$$\left(\frac{1}{6}\,F\,s\,x_z\right)^9 = \frac{\gamma_z N^*}{G^*} \tag{6.4}$$

verknüpft. Gleichkörniges Gut mit $\sigma_\xi = 0$ besitzt die kleinste Oberflächenkennzahl

$$\left(\frac{1}{6}\,F\,s\,x_z\right)_{min} = 1\,. \tag{6.5}$$

7. Das Verteilungsgesetz der Korngewichte für den Zerkleinerungsvorgang II. Jedes Korn vom Ausgangsgewicht γ_0 wird im Falle II zufallsmäßig in k Teile zerspalten. Unter k stellen wir uns eine genügend große Zahl vor. Die bei dieser Art der Zerkleinerung aus γ_0 entstehenden Teilchen bezeichnen wir mit

$$\gamma'_k,\ \gamma'_{k-1},\ \gamma'_{k-2},\ \cdots\quad \gamma'_1,\ \gamma'_2$$

und denken sie so geordnet, daß

$$0 < \gamma'_k < \gamma'_{k-1} < \cdots\ < \gamma'_2 < \gamma'_1 < \gamma_0$$

ist. Insgesamt haben wir dann $kN_0 = N^*$ Teilchen.

Die Erwartungswerte für $\gamma'_k,\ \gamma'_{k-1}, \cdots$ sind[1]

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{\gamma_0}{k}\,\frac{1}{k}\,,\\
\gamma_{k-1} &= \frac{\gamma_0}{k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right),\\
&\vdots\\
\gamma_{k-\nu} &= \frac{\gamma_0}{k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-\nu}\right),\\
&\vdots\\
\gamma_1 &= \frac{\gamma_0}{k}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Jedem dieser k Erwartungswerte ist die gleiche Teilchenzahl N_0 zugeordnet. Gleichung (2.1) war der Sonderfall $k = 2$. Man bestätigt leicht, daß die Summe aller k Erwartungswerte

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_{k-\nu} = \gamma_0$$

ist, wie es sein muß.

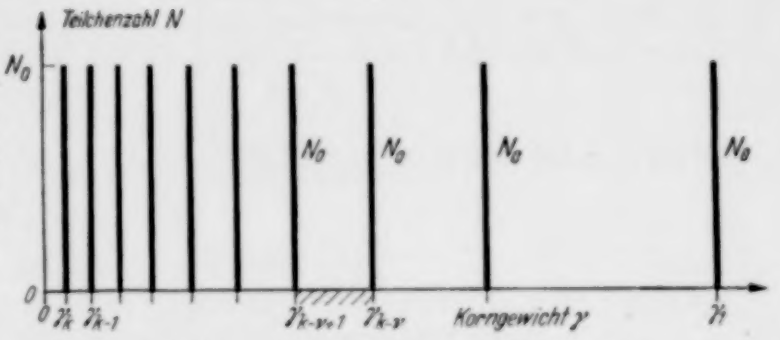


Abb. 6. Die Verteilung der Korngewichte $\gamma_{k-\nu}$ bei der zufallsmäßigen Zerkleinerung eines Kornes vom Ausgangsgewicht γ_0 in $k = 10$ Teile.

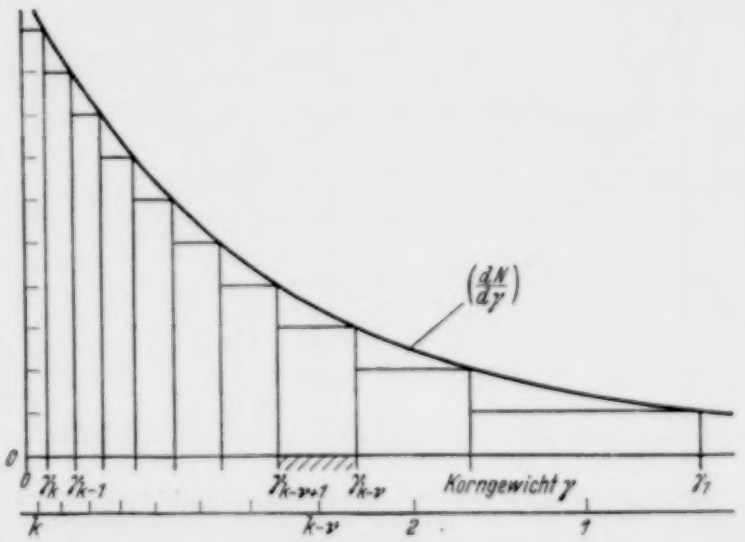


Abb. 7. Aus der kammförmigen Verteilung der Abb. 6 entsteht angenähert eine stetige Verteilung. (Die Rechtecke besitzen gleichen Flächeninhalt).

[1] *W. A. Whitworth*, Choice and Chance. London 1901.

Für $k = 10$ ist die für $\gamma_{k-\nu}$ entstehende kammförmige Verteilung in Abb. 6 dargestellt. Wir machen daraus eine stetige Verteilung, indem wir die N_0 Teilchen vom Gewicht $\gamma_{k-\nu}$ gleichförmig auf den geschrafften Bereich

$$\gamma_{k-\nu} - \gamma_{k-\nu+1} = \frac{\gamma_0}{k} \frac{1}{k-\nu} = \Delta\gamma_{k-\nu} \tag{7.2}$$

verteilen, wie es Abb. 7 zeigt. Dann ist die mittlere Dichte $dN/d\gamma$ der Teilchenzahl N in dem eben genannten Bereich

$$\left(\frac{dN}{d\gamma}\right)_{k-\nu} = \frac{N_0}{\gamma_0} k(k-\nu) . \tag{7.3}$$

Führen wir hier das mittlere Korngewicht $\bar{\gamma}$ bezüglich der Gesamtteilchenzahl $N^* = kN_0$ durch

$$\bar{\gamma} = \frac{G^*}{N^*} = \frac{N_0 \gamma_0}{N^*} = \frac{\gamma_0}{k} \tag{7.4}$$

ein, und gehen zur Dichtefunktion der r e l a t i v e n Teilchenzahl über, so kommt

$$\left(\frac{1}{N^*} \frac{dN}{d\gamma}\right)_{k-\nu} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \frac{k-\nu}{k} . \tag{7.5}$$

Diese Dichte wollen wir mit dem Teilchengewicht $\gamma_{k-\nu+1}$ am Anfang des Bereichs verknüpfen. Nach einer bekannten Abschätzung gilt in erster Näherung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-\nu+1} \approx \int_{k-\nu}^{k} \frac{1}{x}\, dx = \ln\left(\frac{k}{k-\nu}\right) . \tag{7.6}$$

Daraus wird mit (7.1) und (7.4)

$$\gamma_{k-\nu+1} \approx \bar{\gamma} \ln\left(\frac{k}{k-\nu}\right) \tag{7.7}$$

oder

$$\frac{k-\nu}{k} \approx e^{-\frac{\gamma_{k-\nu+1}}{\bar{\gamma}}} . \tag{7.8}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (7.5) ein, so erhalten wir für genügend große k die Dichtefunktion der Teilchenzahl in der Gestalt

$$\frac{1}{N^*} \frac{dN}{d\gamma} = \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} , \tag{7.9}$$

oder dimensionslos geschrieben,

$$\frac{d(N/N^*)}{d(\gamma/\bar{\gamma})} = e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}} . \tag{7.10}$$

Die relative Teilchenzahldichte folgt in Abhängigkeit vom Gewichtsverhältnis $v = \gamma/\bar{\gamma}$ einer Exponentialfunktion (Abb. 8).

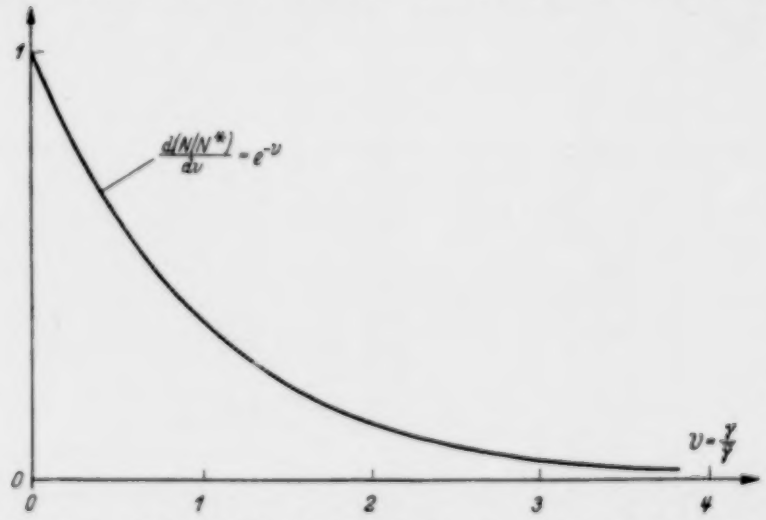


Abb. 8. Die Dichte $d\,(N/N^*)/dv$ der relativen Anzahl über dem Gewichtsverhältnis $v = \gamma/\bar{\gamma}$ der Teilchen wird durch eine Exponentialfunktion dargestellt.

8. Der Siebdurchgang D; die Kennzahlen für den Zerkleinerungsgrad und für die bezogene Oberfläche. Mit Hilfe dieses einfachen Ergebnisses gehen wir nun zum Siebdurchgang $D(x)$ über. Die dN Teilchen vom Einzelgewicht γ besitzen das Gesamtgewicht

$$dG = \gamma\, dN = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} N^*\, d(N/N^*) = G^* \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\, d(N/N^*) . \tag{8.1}$$

Mit (7.10) wird daraus

$$dD = \frac{1}{G^*}\, dG = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}\, d\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) = v\, e^{-v}\, dv . \tag{8.2}$$

Führt man hier den Korndurchmesser x für kugelförmige Teilchen durch

$$\gamma = \frac{\pi}{6} s x^3 \qquad (8.3)$$

und einen geeigneten mittleren Durchmesser $\bar{x}$ durch

$$\bar{\gamma} = \frac{\pi}{6} s \bar{x}^3 \qquad (8.4)$$

ein, so erhält man schließlich als Durchgang D,

$$\left.\begin{aligned} D &= 1 - (1+v)\, e^{-v} \\ &= 1 - (1+\xi^3)\, e^{-\xi^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

und als Rückstand R (Abb. 9)

$$R = (1+v)\, e^{-v} = (1+\xi^3)\, e^{-\xi^3} \qquad (8.6)$$

mit

$$v = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} = \xi^3 \qquad \text{und} \qquad \xi = \frac{x}{\bar{x}}. \qquad (8.7)$$

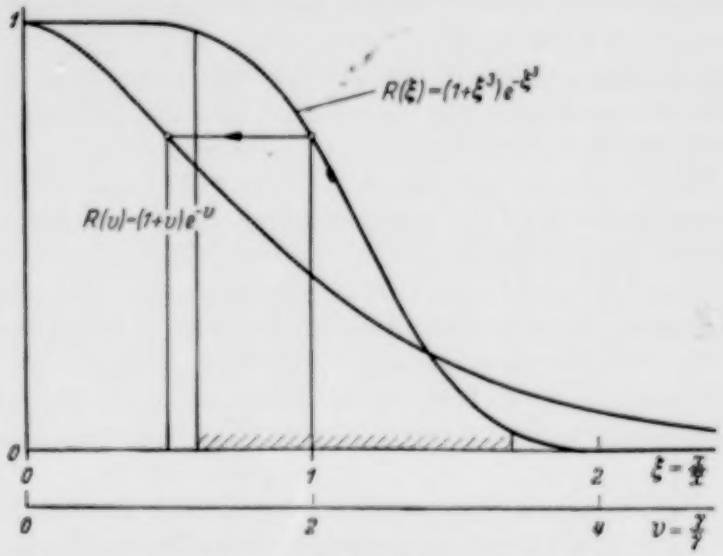


Abb. 9. Der Siebrückstand R über dem Gewichtsverhältnis $v = \gamma/\bar{\gamma}$ und dem Durchmesserverhältnis $\xi = x/\bar{x}$ der Teilchen für die Manning-Verteilung.

Der hier gewählte Bezugsdurchmesser $\bar{x}$ bedeutet streng genommen nicht den mittleren Durchmesser $\bar{\bar{x}}$ bezüglich der gesamten Teilchenzahl N^*, sondern die durch (8.4) mit Hilfe von $\bar{\gamma}$ erklärte Hilfsgröße. Für $\bar{\bar{x}}$ gilt mit (7.10)

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N^*} \int_0^\infty x\, dN = \bar{x} \int_0^\infty v^{1/3} e^{-v}\, dv = \left(\frac{1}{3}\right)!\, \bar{x} = 0{,}993\, \bar{x} \approx \bar{x}.$$

Der Unterschied zwischen $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ ist also praktisch ohne Bedeutung.

Es soll noch gezeigt werden, daß der durch (8.6) gegebene Rückstand im Körnungsnetz (nach *Rosin*, *Rammler* und *Bennett*) nahezu durch eine Gerade dargestellt wird.

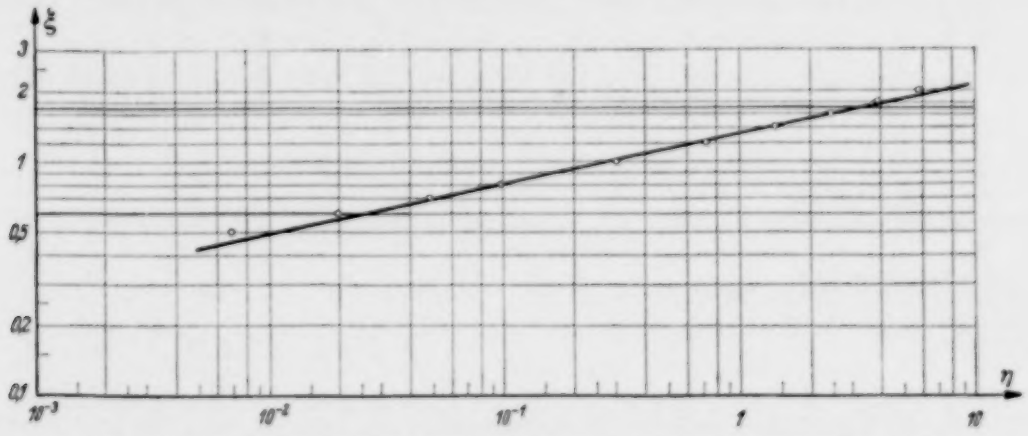


Abb. 10. Die durch die Einzelpunkte dargestellte Funktion $\eta\ (\xi)$ läßt sich im Bereich $0{,}6 \leq \xi \leq 1{,}7$ gut durch die als Gerade erscheinende Potenzfunktion $\eta = \alpha\, \xi^n$ annähern.

Zu dem Zweck setzen wir

$$R(\xi) = (1+\xi^3)\, e^{-\xi^3} = e^{-\eta\,(\xi)}$$

und bestimmen η als Funktion von ξ. Damit Übereinstimmung besteht, muß

$$\eta\,(\xi) = \xi^3 - \ln\,(1+\xi^3) \qquad (8.8)$$

sein. Stellt man den Zusammenhang zwischen η und ξ nach Abb. 10 in einem zweifach logarithmischen Netz dar, so sieht man, daß $\eta\,(\xi)$ für $0{,}6 \leq \xi \leq 1{,}7$ mit sehr guter Annäherung durch eine Potenzfunktion

$$\eta = \alpha\, \xi^n \qquad \text{mit} \qquad \alpha \approx 0{,}30 \qquad \text{und} \qquad n \approx 4{,}6 \qquad (8.9)$$

ersetzt werden kann. In dem genannten Bereich liegen aber nach Abb. 9 rund 94% des Gesamtgewichts der Kornverteilung. Der Rückstand R ist demnach fast im gesamten Bereich

in guter Näherung in der Gestalt

$$R(\xi) \approx e^{-a\,\xi^n} \tag{8.10}$$

darstellbar. Diese Form gibt im Körnungsnetz der Abb. 11 eine gerade Linie, allerdings mit einem wesentlich höheren Exponenten n als man im allgemeinen beobachtet. Berücksichtigt man die normalerweise stets vorhandene Streuung der Meßwerte, so wird man bei der in Abb. 11 gegebenen Sachlage keine Bedenken haben, das Verteilungsgesetz von *Rosin* und *Rammler* als gültig anzunehmen. In Wirklichkeit gehorcht die dargestellte Verteilung aber einem ganz anderen Gesetz, und die RRS-Formel (8.10) ist in diesem Falle nur eine brauchbare Interpolationsformel für die gemessenen Zusammenhänge. Durch das zur Darstellung im Körnungsnetz notwendige mehrfache Logarithmieren werden auch Zusammenhänge von ganz anderer Gestalt als (8.10) über größere Bereiche hinweg fast geradlinig. Das Beispiel zeigt, daß auf Grund des im Körnungsnetz dargestellten versuchsmäßigen Befunds die Entscheidung nicht immer mit ausreichender Sicherheit möglich ist, sondern daß Vorsicht angebracht ist.

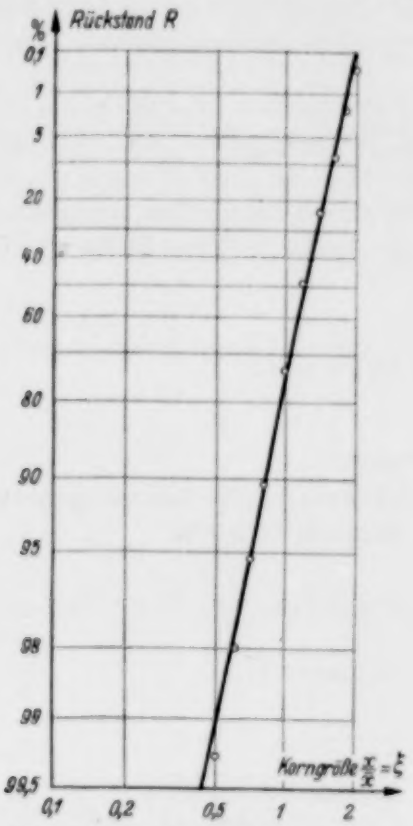


Abb. 11. Der Siebrückstand R (der Manning-Verteilung) nach (8.6) wird im Körnungsnetz nahezu durch eine Gerade dargestellt.

Auch für die Verteilung (8.6) lassen sich die im Abschnitt 6 eingeführten Kennzahlen $\gamma_z N^*/G^*$ und $F s x_z/6$ leicht berechnen. $R = 1/2$ gibt die Bestimmungsgleichung

$$(1+v)\,e^{-v} = \frac{1}{2}$$

für den Zentralwert v_z von v mit der Lösung $v_z = 1{,}678$. Damit wird die Kennzahl für den Zerkleinerungsgrad

$$\frac{\gamma_z N^*}{G^*} = \frac{\gamma_z}{\bar{\gamma}} = v_z = 1{,}678\,. \tag{8.11}$$

Die Oberflächenkennzahl ist

$$\frac{1}{6} F s x_z = \left(\frac{1}{6} F s \bar{x}\right)\left(\frac{x_z}{\bar{x}}\right).$$

Eine einfache Rechnung liefert die Zahlenwerte der Faktoren

$$\frac{1}{6} F s \bar{x} = \int_0^\infty v^{2/3} e^{-v}\, dv = \left(\frac{2}{3}\right)! = 0{,}903$$

und

$$\frac{x_z}{\bar{x}} = \xi_z = \sqrt[3]{v_z} = 1{,}188\,,$$

also

$$\frac{1}{6} F s x_z = 1{,}073\,.$$

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß beide Kennzahlen sich in der gewählten dimensionslosen Darstellung auf konstante Werte reduzieren, weil die *Manning*-Verteilung im Grunde genommen nur einen wesentlichen Parameter ($\bar{\gamma}$ oder γ_z) enthält, während in der logarithmisch-normalen Verteilung zwei voneinander unabhängige Parameter von Bedeutung sind, γ_M und σ_y oder γ_z (bzw. x_z) und σ_ξ.

9. Zusammenfassung. Für Zerkleinerungsvorgänge, bei denen der Elementarvorgang zufallsmäßig in einfacher Weise abläuft, läßt sich die entstehende Kornverteilung berechnen. Für die in der Einführung näher beschriebenen Zerkleinerungsvorgänge I und II genügt die Dichtefunktion $dN/d\gamma$ der Kornzahl N in Abhängigkeit vom Korngewicht γ entweder einer logarithmisch-normalen (I) oder einer einfachen Exponentialverteilung (II). Durch einfache Umrechnung gewinnt man daraus die in den Anwendungen zur Kennzeichnung einer Kornverteilung benutzten (meßtechnisch leicht zugänglichen) Siebrückstands- oder Siebdurchgangskurven. Mit Hilfe anschaulicher Parameter, die man ohne Rechnung unmittelbar aus der gemessenen Rückstandskurve ermitteln kann, lassen sich einfache dimensionslose Kennzahlen ($N^* \gamma_z/G^*$) für den Zerkleinerungsgrad und ($F s x_z/6$) für die bezogene Oberfläche kugelförmiger Teilchen herleiten.

Bei der Festlegung von statistischen Maßzahlen für die Verteilungen (mittlere Korngrößen und dgl.) hat man zu unterscheiden, ob man diese Werte bezügl. der relativen Teilchenzahl N/N^* oder bezüglich des relativen Gewichts G/G^* erklärt. Im vorstehenden wird beispielsweise als kennzeichnender Korndurchmesser der Zentralwert x_z (bzw. das ihm zugeordnete Korngewicht γ_z) bezüglich des Siebrückstandes benutzt. Demnach stellt x_z den Halbwert des Korndurchmessers dar, d. h. auf einem Sieb mit der Maschenweite x_z bleibt die Hälfte des Gesamtgewichts als Rückstand liegen.

Die im Falle I entstehenden logarithmisch normalen Verteilungen sind praktisch verwirklicht bei manchen im Gießereiwesen benutzten Quarz-Formsanden und bei den Entstaubungsgradkurven von Entstaubungs- bzw. Trennvorgängen [1].

Die Handhabung dieser Verteilungen ist deshalb besonders bequem, weil nicht nur die vorhin genannte Kennlinie $dN/d\gamma$ der Teilchenzahldichte, sondern auch alle anderen praktisch wichtigen Kennlinien (Siebrückstandskurven, Oberflächenverteilung u. a.) wieder logarithmisch)-normale Verteilungen werden, deren Parameter in einfacher Weise aus zwei (beliebig wählbaren). Grundparametern hervorgehen.

10. Zur Berechnung der spezifischen Oberfläche von Kornverteilungen. Im Anschluß an die vorausgehenden Betrachtungen sei noch ein Hinweis zur Berechnung der spezifischen Oberfläche gegeben, wenn die Formel von *Rosin, Rammler* und *Sperling* für die Kornverteilung zugrunde gelegt wird.

Geht man von der unter (1.1) gegebenen Formel aus und berechnet die spezifische Oberfläche F des Mahlgutes, so findet man für die dimensionslose Oberflächenkennzahl $(Fsa/6)$ von kugelförmigen Teilchen den Ausdruck (s = spezifisches Gewicht des Mahlgutes) [2]

$$\frac{1}{6} F s a = \int_{\alpha}^{\beta} y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy = J\left(-\frac{1}{n}\right) \quad \text{mit} \quad y = \left(\frac{x}{a}\right)^n . \tag{10.1}$$

Die Grenzen des Integrals,

$$\alpha = \left(\frac{x_{min}}{a}\right)^n \quad \text{und} \quad \beta = \left(\frac{x_{max}}{a}\right)^n , \tag{10.2}$$

werden (nach einem auf *Rammler* zurückgehenden Vorschlag) durch die Bedingung festgelegt, daß der links von α und rechts von β liegende (bei der Berechnung von F vernachlässigte) Gewichtsanteil des Mahlgutes je $0{,}1\% = 10^{-3}$ beträgt. Danach ist $R(\alpha) = e^{-\alpha} = 0{,}999$ und $R(\beta) = e^{-\beta} = 0{,}001$ oder

$$\alpha = 1{,}00 \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad \beta = 6{,}91 \tag{10.3}$$

zu setzen. Die Grenzen α und β des Integrals (10.1) sind also von n unabhängige feste Zahlenwerte.

Die folgende Bemerkung rechentechnischer Art bezieht sich auf das Integral (10.1). Es soll eine Näherungsformel mit Fehlerabschätzung hergeleitet werden. Abkürzend wollen wir $1/n = k$ setzen. Für praktische Zwecke benötigt man den Zahlenwert $J(-k)$ des Integrals (10.1) etwa für $0{,}5 \leq n < \infty$ oder $0 < k \leq 2$. In seiner (für die praktische Verwendung sehr nützlichen) Arbeit hat *Matz* dieses Integral auf folgende Weise berechnet: Die Exponentialfunktion e^{-y} wird in eine Potenzreihe entwickelt, dann wird gliedweise integriert. Das ist ein ziemlich mühevoller Weg; einmal, weil man rd. 20 Glieder der Reihe aufsummieren muß, um das Ergebnis ausreichend genau festzulegen; zum andern ist die Abschätzung der mit diesem Aufwand wirklich erreichten Genauigkeit nicht ganz einfach. Als untere Grenze α gibt *Matz* den von (10.3) abweichenden Wert $0{,}922 \cdot 10^{-3}$. Dieser Wert kommt aus einer von *Rammler* angegebenen Näherungsformel, in der $\log e = 0{,}434\ldots$ zu 0,4 abgerundet wurde. Als obere Grenze wählt *Matz* (ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen) $\beta = 7$.

Zweckmäßiger ist der folgende Weg zur Berechnung. Der Integrand von (10.1) wird bei $y = 0$ unendlich. Diese Singularität können wir aber beseitigen, indem wir auf $J(-k)$ Produktintegration anwenden. Es wird

$$J(-k) = \frac{1}{1-k}\left[y^{1-k} e^{-y}\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{1-k} J(1-k) . \tag{10.4}$$

[1] *F. W. Mayer*, Schriftenreihe „Staub", Heft Nr. 28 (1952), S. 10, Bild 8.
[2] *G. Matz*, Ing.-Archiv 20 (1952), S. 20, Gl. (5) mit $f = 1$.

Ist $n > 1$ oder $0 < k < 1$, so liegt der neue Exponent $(1 - k)$ von y stets zwischen 0 und 1. Dieses Verhalten erleichtert nicht nur die Berechnung sondern auch die Fehlerabschätzung ganz wesentlich. Man findet bei geeigneter Abschätzung nach längerer Rechnung, deren Einzelheiten unterdrückt werden sollen,

$$J(-k) \approx (-k)! - \frac{1}{(1-k)}\, 10^{3(k-1)}\,, \tag{10.5}$$

mit einem Fehler, der dem Betrage nach kleiner ist als

$$f \leq \frac{1}{(1-k)}\, 15 \cdot 10^{-3}\,. \tag{10.6}$$

Liegt der Exponent k zwischen 1 und 2 (mit Ausschluß der Grenzen), so wendet man zweimal Produktintegration an und gelangt schließlich zu der Näherung

$$J(-k) \approx (-k)! - \frac{1}{(1-k)}\, 10^{3(k-1)} - \frac{1}{(1-k)(2-k)}\, 10^{3(k-2)} \tag{10.7}$$

mit der Fehlerabschätzung[1]

$$f \leq \frac{1}{|1-k|\,(2-k)}\, 16 \cdot 10^{-3}\,. \tag{10.8}$$

Damit haben wir sehr handliche Formeln für $J(-k)$ gewonnen, deren Genauigkeit mit einfachsten Mitteln beurteilt werden kann.

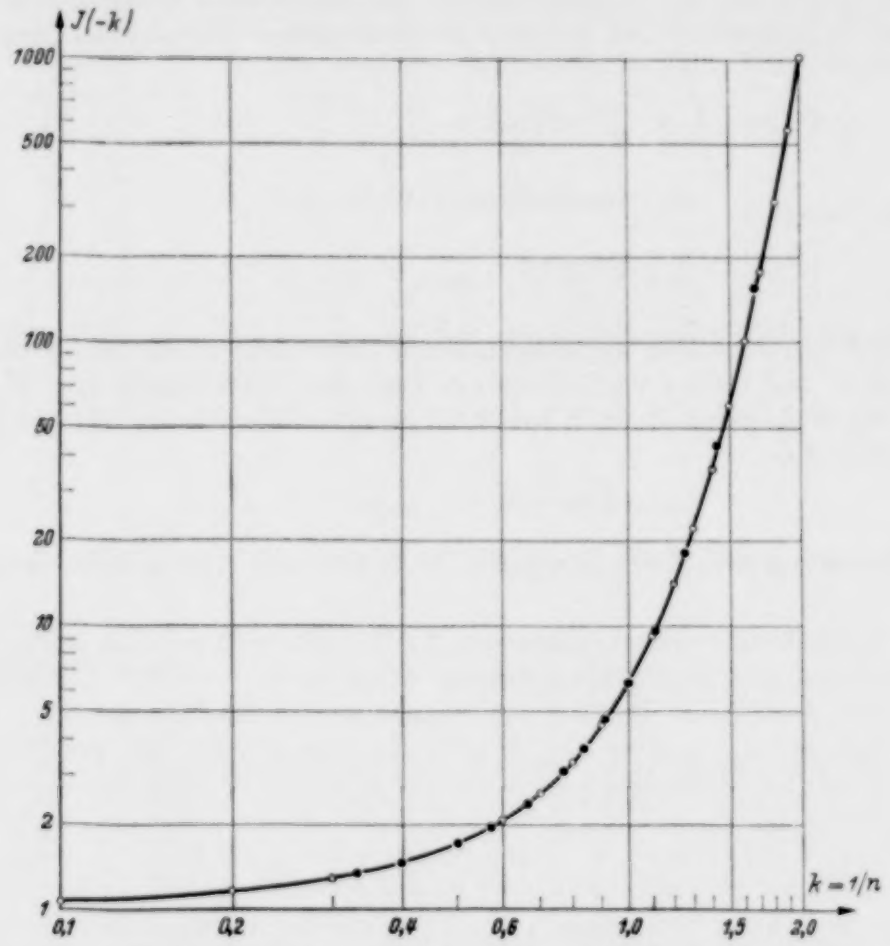


Abb. 12. Die dimensionslose Oberflächenkennzahl $(1/6\, F s a) = J(-k)$ für kugelförmige Teilchen in Abhängigkeit von $k = 1/n$. Vollkreise nach der Rechnung von *Matz*; Leerkreise nach den Näherungsformeln (10.5), (10.7) und (10.9).

Setzt man das Verfahren fort, so gewinnt man für $J(-k)$ eine Reihenentwicklung anderer Art, als sie von *Matz* hergeleitet wurde. Die durch (10.5) und (10.7) angedeutete Gestalt kommt jedoch den Erfordernissen der Rechnung mehr entgegen. Da wir uns für die praktische Verwendung auf den Bereich $0 < k \leq 2$ beschränken können, so benötigen wir die weiteren Reihenglieder nicht und verzichten darauf, sie ausführlich hinzuschreiben.

[1] Die Abschätzung enthält den in (10.4) mit der Näherung $e^{-\alpha} \approx 1$ verbundenen Fehler nicht.

Eine gesonderte Betrachtung ist für die Fälle $n = 1; {}^1/_2; {}^1/_3; \ldots$ oder $k = 1; 2; 3; \ldots$ notwendig. Hier führt die Produktintegration mit entsprechenden Vernachlässigungen auf

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot J(-2) &= \left| -y^{-1} e^{-y} \right|_{\alpha}^{\beta} - J(-1) \approx \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - J(-1) \approx 10^3 - J(-1), \\ 2 \cdot J(-3) &= \left| -y^{-2} e^{-y} \right|_{\alpha}^{\beta} - J(-2) \approx \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - J(-2) \approx 10^6 - J(-2), \end{aligned}\right| \tag{10.9}$$

usw., wobei

$$J(-1) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-y}}{y}\, dy = \int_{\alpha}^{\infty} \cdots - \int_{\beta}^{\infty} \cdots \tag{10.10}$$

ist. Das letzte Integral findet man als Exponential-Integral Ei zahlenmäßig vertafelt [1]. Es ist nämlich

$$J(-1) = -Ei(-\alpha) + Ei(-\beta), \tag{10.11}$$

wobei der zweite Summand für $\beta = 7$ den Wert $Ei(-7) \approx -0{,}00012$ hat und damit im Vergleich zum ersten vernachlässigbar klein ist. Es bleibt also mit praktisch ausreichender Näherung

$$J(-1) \approx -Ei(-\alpha) = 6{,}33 \quad \text{für} \quad \alpha = 10^{-3}. \tag{10.12}$$

Damit sind alle Schwierigkeiten zur Berechnung des Integrals (10.1) aus dem Wege geräumt.

Abb. 12 zeigt das Ergebnis der Rechnung. Die als Vollkreise eingetragenen Punkte wurden von *Matz* auf dem anderen eingangs beschriebenen Wege gefunden. Einige seiner Werte [2] bedürfen streng genommen kleiner Verbesserungen, die aber in Anbetracht der sonstigen Unsicherheiten, die in die Berechnung einer spezifischen Oberfläche eingehen (Abweichungen von der Kugelgestalt, Oberflächenrauhigkeit u. a.), nicht von Belang sind, und die bei dem in Abb. 12 gewählten Maßstab gar nicht sichtbar werden.

Die vorstehenden Betrachtungen werden sich als nützlich erweisen, wenn man zur Berechnung der spezifischen Oberfläche F eine Kornverteilung in zwei Anteile aufspalten muß, einen Feinanteil I und einen Grobanteil II. Das kann in folgendem Zusammenhang notwendig sein (Abb. 13).

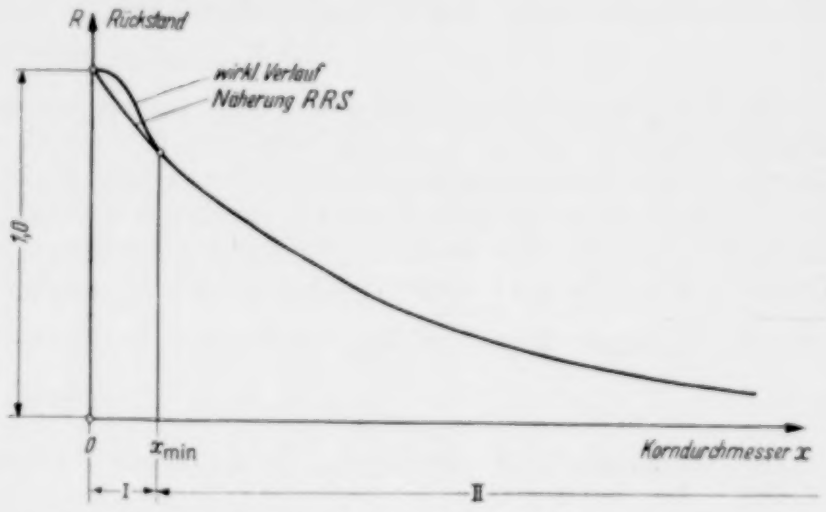


Abb. 13. Zur Aufteilung des Gesamtgewichtes G^* in einen Feinanteil G_I mit $x \leq x_{min}$ und einen Grobanteil G_{II} mit $x > x_{min}$. Die Oberflächenkennzahl des Grobanteils II ist nach der RRS-Formel

$$1/6\, F_{II}{}^{sa} \approx \frac{G^*}{G_{II}}\, J(-k; \alpha).$$

Mit den wirklich beobachteten Exponenten $n = 1/k$ gibt die RRS-Formel (1.1) in vielen Fällen unendlich große Werte für die Gesamtoberfläche und fast in allen Fällen unendlich große Werte für die Gesamtzahl der Teilchen, wenn man den Grenzübergang $x \to 0$ ausführt. Auf der andern Seite kann nicht bestritten werden, daß die Gleichung (1.1) für sehr viele technisch wichtige Mahlgüter den wirklichen Verlauf der Kornverteilung in weitem Bereich so gut wiedergibt, daß kein Anlaß besteht, in diesem Bereich nach einer besseren Näherung zu suchen. Will

---

[1] *Jahnke-Emde*, Tafeln höherer Funktionen, S. 1 und S. 6, 4. Aufl. Leipzig 1948. — Da die Tafel für $Ei(-\alpha)$ in der Nähe von 0 nur die Schrittweite $\Delta\alpha = 0{,}01$ besitzt, so muß man allerdings $\int_{\alpha<0{,}01}^{0{,}01} y^{-1} e^{-y}\, dy$ zusätzlich berechnen, falls die untere Grenze $\alpha < 0{,}01$ ist. Dafür reicht aber im Rahmen unserer Betrachtungen die Näherung

$$\int_{\alpha}^{0{,}01} y^{-1} e^{-y}\, dy \approx \int_{\alpha}^{0{,}01} dy/y = -[2 \ln 10 + \ln \alpha]$$

aus.

[2] Ing.-Arch. 20 (1952), S. 22, Tabelle I.

man dann die Entartung der Kennzahlen für $x \to 0$ vermeiden, so kann man in solchen Fällen aus der Gesamtverteilung einen Feinanteil I, entweder nur gedanklich oder tatsächlich durch einen Sicht- oder Trennvorgang abscheiden. Der Rest, der Grobanteil II, besitzt dann einen kleinsten Korndurchmesser x_{min}. Falls die Gesamtverteilung nach Abb. 13 für $x \geq x_{min}$ ausreichend genau der RRS-Formel folgt, dann wird die Oberfläche O_{II} des Grobanteils II

$$O_{II} = \frac{6}{s} \int_{x_{min}}^{\infty} \frac{dG}{x} = -\frac{6\,G^*}{s} \int_{x_{min}}^{\infty} \frac{dR}{x} \,. \tag{10.13}$$

Mit $(x/a)^n = y$ und $R = e^{-y}$ wird daraus

$$\left(\frac{1}{6}\,\frac{O_{II}}{G_{II}}\,s\,a\right)\frac{G_{II}}{G^*} = \int_{\alpha}^{\infty} y^{-\frac{1}{n}}\, e^{-y}\, dy = J(-k;\alpha)\,. \tag{10.14}$$

Die Zahlenwerte von $J(-k;\alpha)$ bestimmt man aus

$$J(-k;\ \alpha) \approx (-k)! - \frac{\alpha^{1-k}\, e^{-\alpha}}{1-k} \qquad \text{für} \qquad 0 < k = \frac{1}{n} < 1 \tag{10.15}$$

und

$$J(-k;\alpha) \approx (-k)! - \frac{\alpha^{1-k}\, e^{-\alpha}}{1-k}\left(1 + \frac{\alpha}{2-k}\right) \qquad \text{für} \qquad 1 < k < 2\,. \tag{10.16}$$

Für ganzzahlige Werte von k benutzt man (10.12) und (10.9), wobei man in allen Fällen anstelle der früher gewählten unteren Grenze des Integrals $\alpha = 10^{-3}$ jetzt einen anderen durch $\alpha = (x_{min}/a)^n$ gegebenen Wert einsetzen muß.

Der Feinanteil I genügt in zahlreichen Fällen einer logarithmisch normalen Verteilung [1], für welche sich die Oberflächenkennzahl $(F s\, x_z/6)_I$ ebenfalls in einfachster Weise ermitteln läßt, wie vorher gezeigt wurde. Ist das Gesamtgewicht $G^* = G_I + G_{II}$, so folgt die bezogene Oberfläche F der aus I und II bestehenden Mischung aus

$$G^* F = G_I F_I + G_{II} F_{II}\,. \tag{10.17}$$

Mit der geschilderten Aufspaltung wird man in vielen Fällen bereits bessere Werte für die Oberflächenkennzahl erhalten, als man auf Grund der eingangs beschriebenen willkürlichen Begrenzung der Verteilung bei $\alpha = 10^{-3}$ erwarten kann. Selbstverständlich kann man auch bei der Aufteilung jede Rechenarbeit vermeiden, wenn man die Kennzahl $J(-k;\alpha)$ in Abhängigkeit von $k = 1/n$ und $\alpha = (x_{min}/a)^n$ ein für allemal in Zahlentafeln oder Nomogrammen darstellt, was jedoch an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden soll.

[1] *F. W. Mayer*, Schriftenreihe „Staub", Heft Nr. 28 (1952), S. 9 bis 12.

(Eingegangen am 16. März 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *K. Stange*, Karlsruhe, Technische Hochschule.

Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz des Herrn Woinowsky-Krieger im Ingenieur-Archiv Bd. XX, Seite 391.

Von **W. T. Koiter.**

Die bemerkenswerte Arbeit über keilförmige Platten des Herrn *Woinowsky-Krieger* [Ing.-Arch. 20 (1952), S. 391] habe ich mit besonderem Interesse gelesen, weil ich dasselbe Problem unabhängig vom Herrn *Woinowsky-Krieger* für etwas andere Belastungen (kontinuierlich verteilte Biegemomente und Querkräfte auf dem freien Rande) untersucht habe, ebenfalls mit der Mellin-Transformation. Auf Grund meiner noch nicht veröffentlichten Untersuchung möchte ich einige ergänzende Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn *Woinowsky-Krieger* machen.

1. Die Wahl des Integrationsweges $\sigma = -1$ für die *Mellin*sche Umkehrformel wird in der Arbeit des Herrn *Woinowsky-Krieger* nicht näher begründet. Ein Integrationsweg in einem anderen analytischen Streifen der s-Ebene würde jedoch die mathematischen Voraussetzungen für die Gültigkeit der *Mellin*schen Umkehrformel nicht verletzen und würde zu einem völlig anderen Verhalten der Durchbiegung im Unendlichen und in der Nähe der Ecke führen. Aber nur ein Integrationsweg in dem analytischen Streifen der den Punkt $s = -1$ enthält erfüllt die mechanisch fast selbstverständliche Bedingung, daß das mit der *Mellin*schen Umkehrformel erhaltene tangentiale Biegemoment nach r integrierbar sein soll und hierin findet sich die Begründung des Integrationsweges $\sigma = -1$.

2. Das Ergebnis, daß das Randmoment m_{t0} für $\nu = 0$ schon bei einem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/2$ mit $r \to 0$ gegen Unendlich geht (S. 394), steht in Widerspruch mit meiner Untersuchung, nach welcher dieses Moment endlich bleiben soll für $r = 0$. Auswertung der Formel (21) des Herrn *Woinowsky-Krieger* mit Hilfe der Residuenrechnung führt aber auch zu dem endlichen Wert $m_{t0} = -(\pi/2)\,P$. Mit Berücksichtigung von drei Gliedern lautet die für $r < r_0$ konvergente Entwicklung des Randmomentes

$$m_{t0} = -P\left\{\frac{\pi}{2} - 1{,}280\left(\frac{r}{r_0}\right)^{0{,}3523} + \left[0{,}152\sin\left(0{,}916\ln\frac{r}{r_0}\right) + 0{,}005\cos\left(0{,}916\ln\frac{r}{r_0}\right)\right]\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2{,}8231}\right\}.$$

Für $r/r_0 = 0{,}01$, bzw. 1 sind die hiermit errechneten Werte des Randmomentes $-1{,}318\,P$ und $-0{,}295\,P$ gegenüber $-1{,}24\,P$ und $-0{,}300\,P$ als Ergebnis der numerischen Integration des Herrn *Woinowsky-Krieger*. Der Unterschied im Punkte $r/r_0 = 0{,}01$ beträgt 6% und dürfte von Ungenauigkeiten der numerischen Integration herrühren; dies wurde bestätigt durch eine genauere numerische Integration im Punkte $r/r_0 = 0{,}01$, die Herr *J. A. Sparenberg* für mich durchgeführt hat mit Schritten $\Delta u = 0{,}05$ statt den von Herrn *Woinowsky-Krieger* benutzten Schritten $\Delta u = 0{,}1$. Das Ergebnis dieser genaueren numerischen Rechnung stimmt auf 4 Stellen genau mit dem Ergebnis der Residuenrechnung.

3. Für eine Platte mit einem Öffnungswinkel $\alpha = \pi/2$ ist der Verlauf des Randmomentes m_{t0} in der Nähe der Ecke für eine Querkontraktionszahl $\nu > 0$ wesentlich verschieden vom Verlauf für $\nu = 0$. Für $\nu > 0$ ist $m_{t0} = 0$ für $r = 0$, und der Verlauf ist qualitativ in Abb. 1 an gegeben.

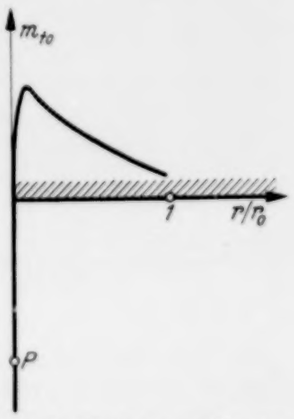


Abb. 1. Randmoment für eine Querkontraktionszahl $\nu > 0$.

4. In der Diskussion der Formel (31) bemerkt Herr *Woinowski-Krieger* (S. 396), daß das Einspannmoment bei einem Öffnungswinkel $\alpha = \pi$ von der Ordnung $(r_0/r)^{1/2}$ mit negativem Vorzeichen unendlich wird. Diese Aussage verkennt den oszillierenden Charakter der Singularität in der Ecke, herrührend von den trigonometrischen Funktionen von $\pm\frac{1}{2}\,k \ln r/r_0$.

(Eingegangen am 4. April 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor *W. T. Koiter*, Delft (Holland), Nieuwelaan 76.

Bemerkung des Herausgebers: Herr *Woinowsky-Krieger* hat den vorstehenden Ausführungen des Herrn *Koiter* in allem Wesentlichen zugestimmt.

Theorie des muldenförmigen Verschleißes im Blasversatzrohr.

Von **E. Maier** [1].

1. Einleitung. Im Steinkohlen-Bergbau benützt man die pneumatische Förderung zum „Versatz" der ausgekohlten Hohlräume mit Gestein bis zu 80 mm Korngröße. Hinter der Aufgabemaschine liegt zunächst die Streckenleitung, die heute entweder aus Stahlrohren oder aus Rohren mit Schmelzbasaltfutter besteht; nach einem Krümmer folgt dann in dem zu versetzenden Feld die Strebleitung, für die nur Stahlrohre benützt werden. Der Verschleiß der Blasversatzrohre erfolgt sehr ungleichmäßig. Nach unseren Beobachtungen schlagen nicht gedrehte Rohre fast durchweg auf der Sohle durch; etwa $^2/_3$ aller Durchschläge liegen im ersten Rohrdrittel, als Folge eines meist langgestreckten, muldenförmigen Einschliffs (Abb. 1).

Die örtliche Konzentration des Verschleißes nahe dem Einlauf war schon lange bekannt, wurde aber im bisherigen Schrifttum [2] so erklärt, daß die Steine an vorstehenden Kanten des Einlaufs abprallen und gegen die gegenüberliegende Rohrwand geschleudert werden. Unsere Versuche ergaben, daß die Erscheinung auf winklige Verlegung der Rohre zurückzuführen ist. Schon die Abwinklung eines Rohres gegenüber dem Vorrohr um den Bruchteil eines Grades nach oben erzeugt diese Muldenbildung auf seiner Sohle und eine deutliche Verkleinerung seiner Lebensdauer. Die vorliegende theoretische Untersuchung der Muldenbildung soll diese Versuchsbeobachtungen stützen, ferner eine Erklärung für das eigenartige Verschleißbild abgeben und darüber hinaus zur Klärung einer Reihe von Fragen beitragen, die von praktischer Bedeutung für das vorliegende Verschleißproblem sind.

Abb. 1. Erstes Drittel (vorne Einlaufseite) eines Blasversatzrohres mit einer typischen Verschleißmulde.

Die Rechnung wird zeigen, daß schon mit verhältnismäßig einfachen Vorstellungen über die Blasgutströmung Muldenformen entstehen, die den beobachteten Formen in allen wesentlichen Einzelheiten gleichen.

Außer der schon erwähnten bevorzugten Lage auf der Sohle im ersten Rohrdrittel weisen die Mulden folgende Merkmale auf:

1. Im Längsschnitt beginnen die Mulden nahe dem Einlauf zunächst flach, vertiefen sich allmählich und enden kurz hinter dem Muldentiefsten. Bei Stahlrohren kann, solange noch kein Durchschlag erfolgt ist, der Winkel zwischen der Tangente an die Schnittkurve und der Rohrlängsachse auch hinter dem Muldentiefsten noch als klein in mathematischem Sinne angesehen werden (bei der Mulde in Abb. 1 beträgt der Größtwert etwa 7,5°).

2. Die Mulden weisen eine ausgesprochen kantenförmige Begrenzung auf, die nahe dem Einlauf zunächst undeutlich beginnt und gegen das Muldenende hin immer schärfer wird.

3. Meist werden die Mulden gegen das Ende hin schmaler.

4. Das Muldenende wandert, verglichen mit der radialen Verschleißgeschwindigkeit, mit verhältnismäßig großer Geschwindigkeit in Strömungsrichtung weiter.

5. Der Verschleiß außerhalb der Mulde ist wesentlich geringer als in der Mulde.

Wir werden vorwiegend das ebene Problem, also den Verschleiß einer zum Blasgutstrahl schräg gestellten Platte behandeln.

---

[1] Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen ausgedehnter Betriebsversuche, die das Ingenieurbüro „Verschleiß-Technik Dr.-Ing. *H. Wahl*", Stuttgart, im Auftrag der Deutschen Kohlenbergbau-Leitung Essen auf einer Anzahl von Schachtanlagen des Ruhrgebiets durchführte. Vgl. *E. Maier*, Untersuchungen über den Verschleiß von Blasversatzrohren und -krümmern. Essen 1952.

[2] *J. Maercks*, Glückauf **74** (1938), S. 262.

2. Das Verschleißgesetz bei schräger Bestrahlung nach Versuchen im Sandstrahlgebläse. Als Grundlage der Berechnungen wird ein formelmäßiger Zusammenhang zwischen örtlichem Verschleiß, Anstrahlwinkel und Blasgutstrahl bei schräger Bestrahlung benötigt. Als einzige wissenschaftliche Grundlage bieten sich dafür die von *Wellinger*[1] durchgeführten Versuche in einem Sandstrahlgebläse. Dabei wurde eine unter dem Winkel γ zur Strahlachse schräggestellte Platte um eine Plattennormale gleichmäßig gedreht, so daß der Anstrahlwinkel auf der ganzen bestrahlten Fläche konstant war und eine Muldenbildung vermieden wurde. Der Verschleiß V (mm^3 je min und cm^2 bestrahlter Fläche) wurde gemäß Abb. 2 über dem Anstrahlwinkel aufgetragen. Gemessen wurden Anstrahlwinkel zwischen 5 und 90°. Für kleinere Winkel, die beim vorliegenden Problem bevorzugt interessieren, sind wir daher auf eine Extrapolation angewiesen. Anstatt der Größe V verwenden wir die Verschleißgeschwindigkeit v_n (mm/h) $= 60\ V/10^2 = 0{,}6\ V$ senkrecht zur bestrahlten Oberfläche.

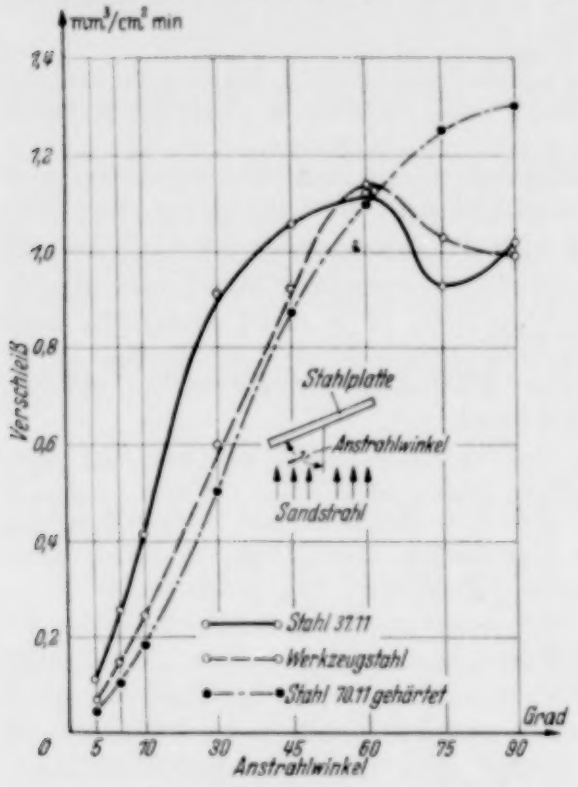


Abb. 2. Verschleiß über dem Anstrahlwinkel nach *K. Wellinger*.

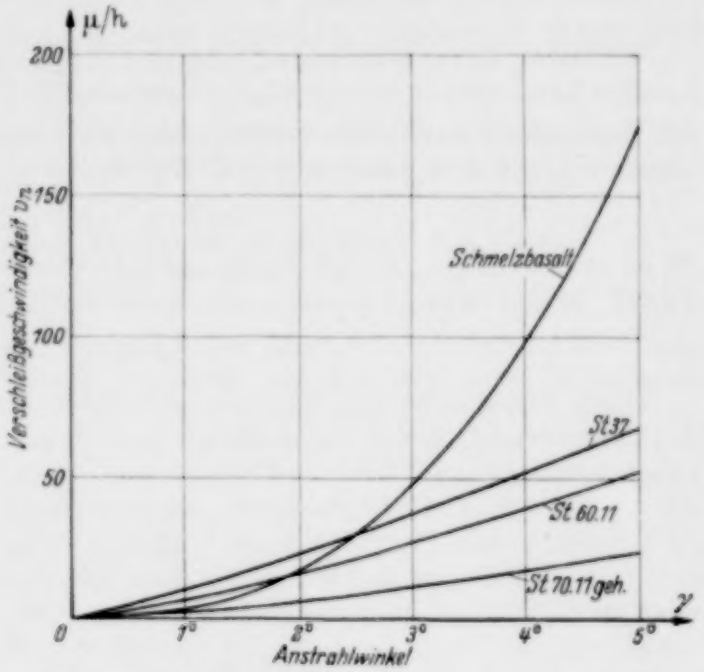


Abb. 3. Verschleißgeschwindigkeiten für kleine Anstrahlwinkel nach Gl. (1).

Aus den Versuchsergebnissen für $\gamma = 5$ bis 30° ermitteln wir folgendes Verschleißgesetz, gültig für die dort vorliegenden Versuchsbedingungen (Art, Körnung, Geschwindigkeit, zeitliche Menge des verblasenen Sandes):

Plattenwerkstoff	Brinellhärte	v_n (mm/h)
St 37	128	$1{,}27\ \sin^{1{,}2}\gamma$
St 60.11 ungehärtet	180	$1{,}225\ \sin^{1{,}3}\gamma$
St 70.11 gehärtet	663	$0{,}865\ \sin^{1{,}5}\gamma$
Schmelzbasalt	—	$100\ \sin^{2{,}6}\gamma$

(1)

Für $0 \leq \gamma \leq 30°$ schreiben wir daher allgemein

$$v_n = c \sin^n \gamma. \tag{2}$$

Der Werkstoff der bestrahlten Platte beeinflußt demnach sowohl die Konstante c wie den Exponenten n. Mit wachsender Werkstoffhärte nimmt n zu.

Die Berechnung von (1) für $\gamma \leq 5°$ ergibt Abb. 3. Daraus geht hervor, daß auf dem ganzen Winkelbereich die Verschleißfestigkeit von Stählen mit wachsender Werkstoffhärte ansteigt. Vorbehaltlich der beobachteten großen Streubreite der Ergebnisse für Schmelzbasalt ist dieser Werkstoff bei sehr kleinem γ verschleißfester als Stähle, bei $\gamma = 5°$ dagegen schon wesentlich schlechter als weicher Stahl.

[1] *K. Wellinger*, Metallkunde **40** (1949), S. 361.

3. Theoretische Betrachtungen zum Verschleißgesetz bei schräger Bestrahlung. Es ist von Interesse, das Verschleißgesetz (2) physikalisch zu begründen.

Wellinger nimmt an, daß sich die Verschleißgeschwindigkeit v_n aus zwei Anteilen zusammensetzt, nämlich einem „Prallverschleiß" infolge Ermüdung des Werkstoffs und einem „Reibverschleiß" durch eine Art Ritzvorgang.

Fliegt ein einzelnes Sandkorn mit der Masse m und der Geschwindigkeit u_0 gegen eine schräggestellte Platte, so nimmt *Wellinger* den Prallverschleißanteil proportional der Impulskomponente in Richtung der Plattennormalen an (gemessen als verschleißendes Volumen):

$$\mathfrak{V}_P \sim m\, u_0 \sin\gamma . \tag{3}$$

Für den Reibverschleiß setzt er mit einer unbekannten Funktion f der in der eckigen Klammer stehenden Größen an (μ = Reibwert):

$$\mathfrak{V}_R = f\,[m\, u_0(\cos\gamma - \mu \sin\gamma);\ m\, u_0 \sin\gamma] . \tag{4}$$

Während wir (3) übernehmen wollen, soll versucht werden, die Beziehung (4) explizit abzuleiten.

Während des Stoßvorgangs ist die Korngeschwindigkeit u mit den Komponenten v, w parallel bzw. senkrecht zur Platte veränderlich, beginnend mit dem Wert $u_0(v_0, w_0)$. Der Weg des Kornschwerpunktes in diesen beiden Richtungen sei x, y, die Normalkraft auf die Platte Y. Dann gilt mit dem *Coulomb*schen Reibwert μ

$$m\,\dot{v} = -\mu Y, \quad m\,\dot{w} = -Y .$$

Wenn während des ganzen Stoßvorganges Gleiten (also am Ende kein reines Abrollen) erfolgt, was für kleine Winkel γ praktisch immer zutrifft, folgt daraus

$$v = v_0 + \mu(w - w_0) . \tag{5}$$

Nach Verschleißversuchen mit gleitender Reibung zwischen Metallen und Mineralien [1] ist der Reibverschleiß der Anpreßkraft und dem Gleitweg verhältig, also (abgesehen von einer hier unwesentlichen Werkstoffkonstanten) mit der Stoßzeit T

$$\mathfrak{V}_R = \int_{t=0}^{T} Y\, dx = \int_0^T Y\, v\, dt$$

oder mit (5)

$$\mathfrak{V}_R = (v_0 - \mu\, w_0)\int_0^T Y\, dt + \mu \int_0^T Y\, w\, dt . \tag{6}$$

Mit der Endgeschwindigkeit w_1 ist

$$\left.\begin{aligned} \int_0^T Y\, dt &= m(w_0 - w_1) , \\ \int_0^T Y\, w\, dt = \int_0^T Y\, dy &= \frac{m}{2}(w_0^2 - w_1^2) . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mit einer Stoßzahl ε wird

$$w_1 = -\varepsilon\, w_0 \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1)$$

und damit (6) wegen (7) und wegen $v_0 = u_0 \cos\gamma$, $w_0 = u_0 \sin\gamma$

$$\mathfrak{V}_R = m\, u_0^2 (1 + \varepsilon) \sin\gamma \left[(\cos\gamma - \mu \sin\gamma) + \frac{\mu}{2}(1 - \varepsilon)\sin\gamma\right] . \tag{8}$$

Nur für vollelastischen Stoß ($\varepsilon = 1$) stimmt (8) mit (4) überein. Bei kleinen Anstrahlwinkeln γ gilt genähert

$$\mathfrak{V}_R = m\, u_0^2 (1 + \varepsilon) \sin\gamma .$$

Mit (3) wird dann der Gesamtverschleiß

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_P + \mathfrak{V}_R \sim m \sin\gamma .$$

Ob $\mathfrak{V}_P$ nach der *Wellinger*schen Annahme (3) $\sim u_0$, $\mathfrak{V}_R$ jedoch $\sim u_0^2$ ist, bedarf noch der versuchsmäßigen Bestätigung. Da bei kleinen Winkeln γ der Anteil $\mathfrak{V}_R$ überwiegen wird,

[1] *H. Wahl*, Braunkohle, Wärme und Energie **3** (1951), S. 75.

schreiben wir für unsere Zwecke

$$\mathfrak{V} \sim \frac{1}{2} m u_0^2 \sin \gamma . \tag{9}$$

Hat das verschleißende Volumen $\mathfrak{V}$ die mittlere Höhe s in Richtung der Plattennormalen und den mittleren Querschnitt f in Oberflächenrichtung, so folgt aus (9), daß die mittlere Dickenabnahme s verhältig ist der auftreffenden kinetischen Energie des Einzelkornes, bezogen auf die getroffene Plattenfläche.

Trifft nun statt des Einzelkornes ein stationärer Blasgutstrom die Platte, so entsteht bei konstantem Auftreffwinkel eine gleichmäßige Verschleißgeschwindigkeit v_n senkrecht zur bestrahlten Fläche, die der Energiedichte q_P je Einheit der Zeit und der getroffenen Plattenfläche verhältig ist:

$$v_n \sim q_P \sin \gamma .$$

Nimmt man vernachlässigbare Längenabmessungen der Einzelkörner an, so wird ein Flächenelement dF der Platte von einer Stromröhre getroffen, die den Querschnitt $dF_S = dF \sin \gamma$ besitzt. Die Energiedichte je Einheit des Strahlquerschnittes ist also $q = q_P/\sin \gamma$. Damit wird

$$v_n \sim q \sin^2 \gamma .$$

Dieses Gesetz entspricht der Gl. (2). Wir haben also mit Hilfe von üblichen Regeln der Mechanik ein Verschleißgesetz abgeleitet, das als mittlerer Kurvenverlauf der Versuchsergebnisse (1) gelten kann.

In sinngemäßer Erweiterung von (1) benützen wir daher im folgenden das Gesetz

$$v_n = k q \sin^n \gamma \tag{10}$$

mit einer von der Blasgutart und dem Plattenwerkstoff abhängigen Konstanten k. Die Konstante c von (2) entspricht somit einem Mittelwert des Produktes kq über dem Strahlquerschnitt.

4. Anwendung des Verschleißgesetzes auf das Blasversatzrohr. Für die Berechnung der Verschleißerscheinungen im Blasversatzrohr ergibt sich nun folgende Aufgabenstellung: Ein Strahl von zunächst feinkörnigem Blasgut mit veränderlicher Energiedichte q über dem Strahlquerschnitt ströme in parallelen Stromfäden und treffe sodann auf ein unter dem Knickwinkel α zur Strahlrichtung nach oben angestelltes Rohr. Gesucht ist der Verlauf der Verschleißfläche über der Zeit. Wegen des veränderlichen q (und beim Rohr wegen der gekrümmten Innenfläche) ändern sich Verschleißgeschwindigkeit und Anstrahlwinkel γ über Raum und Zeit.

Die Einzelkörner sollen sich in ihrer Bewegung gegenseitig nicht beeinflussen und nach dem ersten Auftreffen auf die Wand keinen weiteren meßbaren Verschleiß innerhalb der betrachteten Rohrzone hervorrufen. Beide Vereinfachungen werden als zulässig erachtet.

Auch bei Knickwinkel Null tritt im Gegensatz zu (10) tatsächlich ein Verschleiß auf teils durch Entlanggleiten des Blasgutes an der Wand unter Belastung durch das Eigengewicht, teils durch Stöße, die infolge der Abweichung der Einzelbewegungen von der reinen Parallelströmung entstehen. Daher gilt die Rechnung nicht für kleinste Knickwinkel (schätzungsweise unter 0,5°).

Steine endlicher Abmessungen können berücksichtigt werden, wenn die Energiedichte nicht auf die Schwerpunktsbahnen, sondern auf die (bei Knick nach oben stets unterhalb der Schwerpunktsbahnen liegenden) Stoßstellen bezogen wird. Dies ist neben dem Eigengewicht der Steine ein weiterer Grund für die vorauszusetzende hohe Energiekonzentration nahe der Rohrsohle.

5. Das ebene Problem der Muldenbildung. Anstatt des verwickelten räumlichen Rohrproblems betrachten wir im folgenden das ebene Problem eines waagerechten Blasgutstrahls von der Höhe $2A$, dessen Energiedichte q nur in Richtung A veränderlich ist und der eine unter dem kleinen [1] Knickwinkel α nach oben angestellte (im allgemeinen als ursprünglich eben anzunehmende) Platte beaufschlagt (Abb. 4).

Durch den Schnittpunkt des unteren Strahlrandes mit der unverschlissenen Platte als Ursprung legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Z senkrecht und parallel zur

[1] Die Beschränkung auf kleine Knickwinkel ist praktisch ausreichend und in der zahlenmäßigen Auswertung erheblich einfacher als die an sich durchführbare allgemeine Lösung.

Strahlrichtung. Setzen wir lediglich voraus, daß der obere Strahlrand die unverschlissene Platte im Punkt $Z = 2\,A/\alpha$ schneidet, so ist der Winkel α auch bei nicht ebener Platte definiert; dabei muß hinsichtlich der Plattenform nur vorausgesetzt werden, daß der Auftreffwinkel γ überall klein ist. Es ist also gegeben $Z\,(X)$ zur Zeit $T = 0$, gesucht $Z\,(X, T)$.

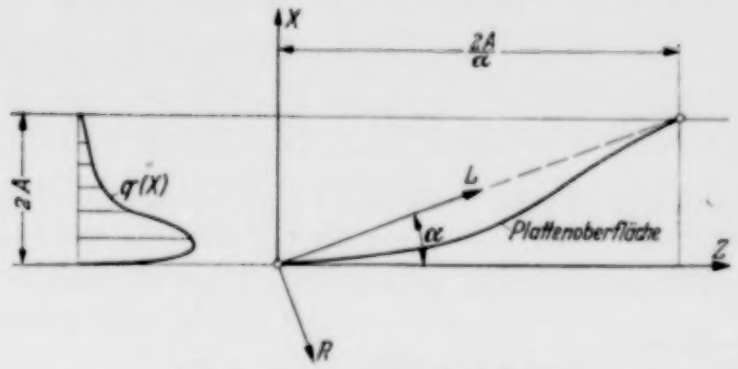


Abb. 4. Schräg angestrahlte Platte.

Weiter führen wir ein zu X, Z unter dem Winkel α gedrehtes Koordinatensystem R, L ein, das bei ebener Platte den Verschleiß R senkrecht zur ursprünglichen Plattenoberfläche im Abstand L vom Ursprung darstellt; dabei ist

$$R \approx \alpha Z - X\,, \quad L \approx Z\,.$$

Wir schreiben dimensionslos

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{X}{A}\,, & z &= \frac{\alpha Z}{A}\,, \\ r &= \frac{R}{A} \approx z - x\,, & l &= \frac{\alpha L}{A} \approx z\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mit (11) erhält man die von dem speziellen Winkel α unabhängige dimensionslose Darstellung von Abb. 6 bis 10, wo die ursprünglich ebene Plattenoberfläche durch die Gerade $z = x$ gegeben ist. Die Stelle $r_{max} \equiv r_D$ sei das „Muldentiefste", gekennzeichnet durch

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1\,, \tag{12}$$

also durch eine Tangentenrichtung parallel zur Anfangsgeraden $z = x$. Das Muldentiefste ist die jeweils dünnste Stelle einer ursprünglich planparallelen Platte (Durchschlaggefahr).

An einer beliebigen Stelle $z\,(x, T)$ ist der ebenfalls als klein vorausgesetzte Anstrahlwinkel

$$\gamma = \frac{\partial X}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial x}{\partial z}\,. \tag{13}$$

Mit dem Verschleißgesetz (10) wird dann die Verschleißgeschwindigkeit senkrecht zur jeweiligen Oberfläche

$$v_n(x) = k\, q(x)\, \alpha^n \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^n. \tag{14}$$

Bei Beschränkung auf homogenen Plattenwerkstoff wird $k = k_0$ eine Konstante. Mit

$$v_n = \gamma \frac{\partial Z}{\partial T} \tag{15}$$

und den Abkürzungen

$$\varrho = \frac{q}{q_{max}}\,, \qquad t = \frac{\alpha^n\, k_0\, q_{max}}{A}\, T \tag{16}$$

folgt aus (14) die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{n-1} \frac{\partial z}{\partial t} = \varrho\,(x)\,, \tag{17}$$

die mit der gegebenen Anfangsbedingung $z\,(x, 0)$ das Problem löst.

6. Lösungen des ebenen Problems. a) Sonderfall $n = 1$. Für $n = 1$, das nach (1) und (2) die praktische untere Grenze für n bilden wird, folgt aus (17) mit $z_0(x) \equiv z\,(x, 0)$

$$z\,(x, t) = z_0(x) + \varrho\,(x)\, t \tag{18}$$

oder mit (11) und (16)

$$Z(X, T) = Z_0(X) + k_0\, q_0(X)\, T\,.$$

Die Verschleißgeschwindigkeit in Strahlrichtung ist also auf jedem Strahl X konstant und der Energiedichte des Strahls verhältig. Sie ist insbesondere unabhängig von α oder γ (was aber beispielsweise für $\partial R/\partial T$ nicht zutrifft) und unabhängig von der Anfangskurve $Z_0(X)$. Die Verschleißkurve für beliebiges T läßt sich leicht aufzeichnen. Bei der ursprünglich ebenen

Platte $Z_0 = X/\alpha$ liegt das Muldentiefste nach (12) und (18) unabhängig von T auf dem Strahl mit der größten Energiedichte q_{max}.

Für $d\varrho/dx < 0$ und wachsendes t kann $\partial z/\partial x$ schließlich Null oder gar negativ werden; nach (13) ist dann die Voraussetzung kleiner Werte γ nicht mehr erfüllt und die Lösung ungültig.

Die Unabhängigkeit der Verschleißgeschwindigkeit in Strahlrichtung vom Anstrahlwinkel zeigt, daß die Lösung auch auf das allgemeine räumliche Problem, zum Beispiel das Blasversatzrohr übertragbar ist, wo die Strahldichte auch in Querrichtung veränderlich sein kann und der Anstrahlwinkel durch die Querkrümmung der Rohrwand beeinflußt wird.

b) Die Lösung für beliebiges $n > 1$. Das vollständige Integral von (17) für $n > 1$ lautet [1]

$$\Phi(x, t, z, C_1, C_2) \equiv \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} [J_{n-1}(x) + C_1]^{n-1} (t + C_2) - z^n = 0 \tag{19}$$

mit den Integrationskonstanten C_1, C_2 und der Abkürzung

$$J_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\varrho^{n-1}}(x)\, dx\,. \tag{20}$$

Die Anfangsbedingung in Parameterform

$$x = \xi, \qquad t = 0, \qquad z = \varphi(\xi) \tag{21}$$

in (19) eingesetzt liefert die Gleichung $\Phi(\xi, C_1, C_2) = 0$; außerdem muß $\partial\Phi(\xi, C_1, C_2)/\partial\xi = 0$ erfüllt sein. Daraus folgt

$$C_1 = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\varrho^{n-1}}(\xi) \frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)} - J_{n-1}(\xi), \qquad C_2 = \frac{\varphi(\xi)\,[\varphi'(\xi)]^{n-1}}{n\,\varrho(\xi)}, \tag{22}$$

so daß man die beiden Gleichungen

$$\Phi(x, t, z, \xi) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}(x, t, z, \xi) = 0 \tag{24}$$

erhält.

Gleichung (24) ist erfüllt für den Sonderfall

$$1 + (n-1)\frac{\varphi(x)\,\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} - \frac{\varrho'(x)}{\varrho(x)}\,\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = 0\,, \tag{25}$$

der zu jeder Anfangsbedingung $z(x, 0)$ eine spezielle Kurve $\varrho(x)$ zuordnet und hier nicht allgemein diskutiert werden soll.

Nimmt man diesen Fall aus, so folgt aus (23) und (24)

$$t = \frac{J_{n-1}(x) - J_{n-1}(\xi)}{(n-1)\,\varrho^{\frac{n}{n-1}}(\xi)}\,[\varphi'(\xi)]^n,$$

$$z = \varphi(\xi) + \frac{n}{n-1}\,\frac{J_{n-1}(x) - J_{n-1}(\xi)}{\varrho^{\frac{1}{n-1}}(\xi)}\,\varphi'(\xi)$$

und damit die endgültige Lösung

$$\left.\begin{aligned} z(x, t) &= \varphi(\xi) + \frac{n\,\varrho(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^{n-1}}\,t, \\ J_{n-1}(x, t) &= J_{n-1}(\xi) + \frac{(n-1)\,\varrho^{\frac{n}{n-1}}(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^n}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Für die ursprünglich ebene Platte ist $\varphi(\xi) = \xi$, $\varphi'(\xi) = 1$ und damit

$$\left.\begin{aligned} z(x, t) \equiv \bar{z}(\xi, t) &= \xi + n\,t\,\varrho(\xi), \\ J_{n-1}(x, t) \equiv \bar{J}_{n-1}(\xi, t) &= J_{n-1}(\xi) + (n-1)\,t\,\varrho^{\frac{n}{n-1}}(\xi). \end{aligned}\right| \tag{27}$$

[1] Vgl. etwa *B. Baule*, Die Math. d. Naturforschers u. Ing., Bd. VI, S. 30.

Der Parameter ξ in (26) und (27) ist im allgemeinen nicht eliminierbar. Auch wenn $\varrho(x)$ formelmäßig gegeben ist, ist nur in wenigen einfachen und nicht besonders interessanten Fällen eine geschlossene Lösung $z(x, t)$ möglich.

Im allgemeinen muß man für eine Reihe von Zahlenwerten ξ und für bestimmte Werte t die zugehörenden Größen $z(x, t)$ und $J_{n-1}(x, t)$ aus (26) bzw. (27) berechnen, wobei die Zuordnung zu ξ, t durch die Querstriche in (27) zum Ausdruck gebracht ist. Aus der über x aufgetragenen Kurve $J_{n-1}(x)$ kann man das zu ξ, t gehörende x ermitteln und hat damit die gesuchte Zuordnung $z(x, t)$.

Bei der ursprünglich ebenen Platte wird der Sonderfall (25), für den (27) nicht gilt, $\varrho'(x) = \varrho/x$ oder integriert mit einer Konstanten c

$$\varrho(x) = c\,x\,.$$

Damit wird (22) $C_1 = 0$, $C_2 = 1/n\,c$, und aus (19) folgt

$$z(x, t) = x\sqrt[n]{1 + c\,n\,t}\,.$$

Die Verschleißkurve $z(x)$ bleibt für alle Werte t eine Gerade. Für konstantes x nimmt z mit wachsendem t immer langsamer zu; je größer n, desto stärker ist diese Erscheinung.

7. Diskussion der Lösung für $n > 1$ bei der ebenen Platte und $\varrho(0) = 0$. a) Verschiedenes. Gegeben sei die Kurve $\varrho(x)$ für $0 \leq x \leq 2$, die (eventuell abgesehen von den Endpunkten) als stetig und > 0 vorausgesetzt werde. Außerhalb des genannten Bereichs ist ϱ nicht definiert, und daher ist auch ξ innerhalb dieses Bereichs zu wählen.

Für $\varrho(0) = 0$ ist nach (20) $J_{n-1}(0) = 0$ und nach der zweiten Gleichung (27) das zu $\xi = 0$ gehörende $J_{n-1}(x) = 0$, das heißt zu $\xi = 0$ gehört $x = 0$; aus der ersten Gleichung (27) folgt $z(0, t) = 0$, das heißt der Anfangspunkt $x = 0$ erleidet keinen Verschleiß.

Der Fall $\varrho(0) \neq 0$ führt zu einer Sonderlösung und wird in Abschnitt **8** behandelt.

Wegen $\varrho(x) > 0$ ist $J_{n-1}(x)$ eine mit x monoton anwachsende Kurve. Nach der zweiten Gleichung (27) ist $J_{n-1}(x) > J_{n-1}(\xi)$ für $t > 0$, das heißt jedem ξ ist ein Wert $x > \xi$ zugeordnet. Im Gegensatz zum Fall $n = 1$, wo der Verschleiß an einer Stelle x nur von $\varrho(x)$ abhing, ist also jetzt für $n > 1$ der Verschleißverlauf in x abhängig vom ϱ-Verlauf im Gebiet $\xi \leq x$, während der ϱ-Verlauf im Gebiet $\xi > x$ ohne Einfluß darauf ist.

Nach (27) ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{\varrho(x)}{\varrho(\xi)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \tag{28}$$

wegen $\varrho > 0$ stets positiv, das heißt nach (13) könnte der Anstrahlwinkel γ im Gegensatz zum Fall $n = 1$ höchstens 90° werden, wenn (17) für beliebiges γ gelten würde.

Ferner ist nach (27) $\partial z(x)/\partial t = n\varrho(\xi)$; für $t = 0$ ist nach (21) $x = \xi$ und daher die Verschleißgeschwindigkeit in Strahlrichtung wie im Falle $n = 1$ der Energiedichte $\varrho(x)$ verhältig.

b) Die Eckenbildung. Für konstantes t haben die Kurven $\bar{z}(\xi)$ und $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ nach (27) Extremwerte an der gleichen Stelle ξ_i, die durch

$$\varrho'(\xi) = -\,1/n\,t \tag{29}$$

bestimmt ist. Solche Extremwerte können also nur an Stellen ξ_i auftreten, wo $\varrho(\xi)$ mit wachsendem ξ abnimmt. An diesen Stellen ist ferner

$$\bar{z}''(\xi) = n\,t\,\varrho''(\xi)\,, \quad \bar{J}''_{n-1}(\xi) = n\,t\,\varrho''(\xi)\,\varrho^{\frac{1}{n-1}}(\xi)\,.$$

Ist also $\varrho''(\xi_i) < 0$, so hat sowohl $\bar{z}(\xi)$ wie $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ in ξ_i ein Maximum und umgekehrt bei $\varrho''(\xi_i) > 0$ ein Minimum (vgl. Abb. 9); bei $\varrho''(\xi_i) = 0$ haben beide Kurven eine horizontale Wendetangente.

Da $J_{n-1}(x)$ monoton mit x wächst, bedeutet ein Maximum von $\bar{J}_{n-1}(\xi) = J_{n-1}(x)$, daß das zu ξ gehörende x, über ξ aufgetragen, an der Stelle ξ_i ebenfalls ein Maximum hat. Da an dieser Stelle auch $\bar{z}(\xi) = z(x)$ ein Maximum besitzt, folgt daraus, daß die über x aufgetragene Kurve z für diesen Wert ξ_i eine Spitze mit positiver Tangentenrichtung $\partial z/\partial x$ aufweist derart, daß mit weiter wachsendem ξ sowohl z als x wieder abnehmen; wir wollen sie eine Maximum-Spitze nennen.

Umgekehrt gehört zu einer Stelle ξ_i, an der $\bar{z}(\xi)$ und $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ ein Minimum haben, eine Spitze der Kurve $z(x)$ ebenfalls mit positiver Tangentenrichtung so, daß mit weiter wachsendem ξ die Größen z und x wieder zunehmen, also eine Minimum-Spitze.

Im Falle des Blasversatzrohres werden verhältnismäßig wenige Typen von Kurven $\varrho(x)$ in Frage kommen. In Sohlennähe wird an einer gewissen Stelle x_M das Maximum $\varrho(x) = 1$ mit $\varrho''(x) < 0$ auftreten. Besitzt $\varrho(x)$ nirgends einen Wendepunkt, so ist überall $\varrho''(x) < 0$. Andernfalls kommt im Anschluß an den Wendepunkt x_W ein Bereich mit $\varrho''(x) > 0$, der sich im allgemeinen bis zum Strahlrand $x = 0$ bzw. 2 erstrecken wird. Wir wollen annehmen, daß nur ein Maximum x_M und im Bereich $x > x_M$ nur ein Wendepunkt auftritt.

In diesen Fällen muß eine Maximum-Spitze von $z(x)$ einem Wert $\xi_i > \xi_M$ zugeordnet sein; existiert ein Wendepunkt $\xi_W > \xi_M$, so gilt außerdem $\xi_i < \xi_W$. Eine Minimum-Spitze kann dagegen nur einem Punkt $\xi_i > \xi_W (> \xi_M)$ zugeordnet sein.

Geht man auf der Kurve $z(x)$ im Sinne zunehmender ξ-Werte entlang, so gibt es vor und hinter der Maximum-Spitze einen Kurvenbereich, auf dem zu jedem x zwei Werte z und ξ gehören. Zu dem kleineren ξ vor der Spitze gehört ein größeres $\varrho(\xi)$ als zu dem größeren ξ hinter der Spitze, das heißt nach (28) muß $\partial z/\partial x$ über die Spitze hinweg zunehmen. Dasselbe gilt aber auch für die Minimumspitze. Dies ist nur möglich, wenn $z(x)$ zwischen den beiden Spitzen einen Doppelpunkt aufweist (Abb. 9).

Das geschlossene Kurvenstück vom Doppelpunkt über die beiden Spitzen zurück zu diesem Punkt ist physikalisch bedeutungslos, da die eingeschlossene Fläche bereits vor dem der Kurve zugeordneten Zeitpunkt verschlissen ist.

Wesentlich ist das Auftreten des Doppelpunktes, der bedeutet, daß in der Verschleißkurve $z(x)$ eine Ecke auftreten kann, wie sie praktisch beobachtet wird (Abb. 1). Es ist bemerkenswert, daß diese Eckenbildung rein theoretisch nur auf Grund des einfachen Verschleißgesetzes (10) bzw. (17) nachgewiesen werden konnte. Die Ecke kann im Falle $\varrho(0) = 0$ nur entstehen, wenn $\varrho(\xi)$ in einem gewissen Bereich ξ mit wachsendem ξ von einem Maximum über einen Wendepunkt hinweg abnimmt.

Da die Anfangskurve $z(x) = x$ stetig ist, muß die Eckenbildung erst bei einer gewissen Zeit t_E beginnen, nämlich dann, wenn die beiden aufeinanderfolgenden Extremwerte von $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ und zugleich von $\bar{z}(\xi)$, die ja die Spitzen $z(x)$ bestimmen, zusammenfallen. Dies tritt ein, wenn $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ und $\bar{z}(\xi)$ eine horizontale Wendetangente besitzen, also wenn außer (29)

$$\varrho''(\xi) = 0 \tag{30}$$

ist. Der Wendepunkt ξ_W bestimmt also mit (29) die Zeit t_E. Aus (27) folgt sodann $x_E (> \xi_W)$ und

$$z_E = l_E = \xi_W - \frac{\varrho(\xi_W)}{\varrho'(\xi_W)}. \tag{31}$$

Die Entfernung l_E des ersten Auftretens der Ecke vom Plattenanfang ist also unabhängig von n.

Ist für $\xi > \xi_M$ durchweg $\varrho'' < 0$, so kann $\bar{J}_{n-1}(\xi)$ ein Maximum an einer Stelle ξ_k ($\xi_M < \xi_k \leq 2$) besitzen, keinesfalls jedoch ein darauffolgendes Minimum. Da dann $\bar{J}_{n-1}(\xi_k) \geq \bar{J}_{n-1}(2) \geq J_{n-1}(2)$ ist, ist nach der zweiten Gleichung (27) dem Wert ξ_k kein Wert x im Bereich $0 \leq x < 2$ zugeordnet; die Kurve $z(x)$ verläuft daher monoton ohne Ecke.

c) Lebensdauer abhängig vom Knickwinkel bei gleichmäßiger Wandstärke. Aus der Verknüpfung der dimensionslosen Größen x, t, z, ϱ in der Differentialgleichung (17) folgt, daß bei gegebenem $\varrho(x)$ die „Zeit" t_D festliegt, bei der das Muldentiefste den durch die Plattenwandstärke bestimmten Wert r_D (11) in der dimensionslosen Entfernung l_D vom Plattenanfang erreicht. Dann folgt bei konstantem k_0, A, q_{max} sofort aus (16) die Lebensdauer der Platte

$$T \sim \alpha^{-n} \tag{32}$$

und aus (11) die Lage des Durchschlages

$$L_D \sim 1/\alpha. \tag{33}$$

Die Proportionalität gilt für alle Längen, insbesondere auch die „Muldenlänge" L_E bis zur Ecke.

Beide Beziehungen (32) und (33) sind von praktischer Wichtigkeit: Der Knickwinkeleinfluß auf die Lebensdauer ist nach (32) unabhängig vom Verlauf der Energiedichte q, aber

abhängig von der Werkstoffkenngröße n (2). Die Lebensdauer von ungehärtetem Stahl beträgt bei $\alpha = 5°$ etwa 20% ihres Wertes bei 1°, diejenige von Schmelzbasalt dagegen nur 1,5% (Abb. 5). Der Knickwinkeleinfluß auf die Lage des Durchschlags L_D ist nach (33) weder von q noch von n abhängig; doppelter Knickwinkel gibt halbes L_D.

8. Zweite Lösung für $\varrho(0) \neq 0$ bei ebener Platte und $n > 1$. Wiederum unter Beschränkung auf die ursprünglich ebene Platte ist jetzt noch der in Abschnitt 7 ausgenommene Fall $\varrho(0) \neq 0$ zu untersuchen. Da man für $\xi < 0$ die Dichte $\varrho = 0$ anzunehmen hat, besteht in $\xi = 0$ eine Unstetigkeit. Wegen des nachgewiesenen Einflusses von $\varrho(\xi)$ auf $z(x)$ an Stellen $x > \xi$ muß sich diese Unstetigkeit auch auf $z(x)$ in $0 \leq x \leq 2$ auswirken. Setzt man $\xi = 0$ und $\varrho(0) \equiv \varrho_0$ in (27) ein, so folgt

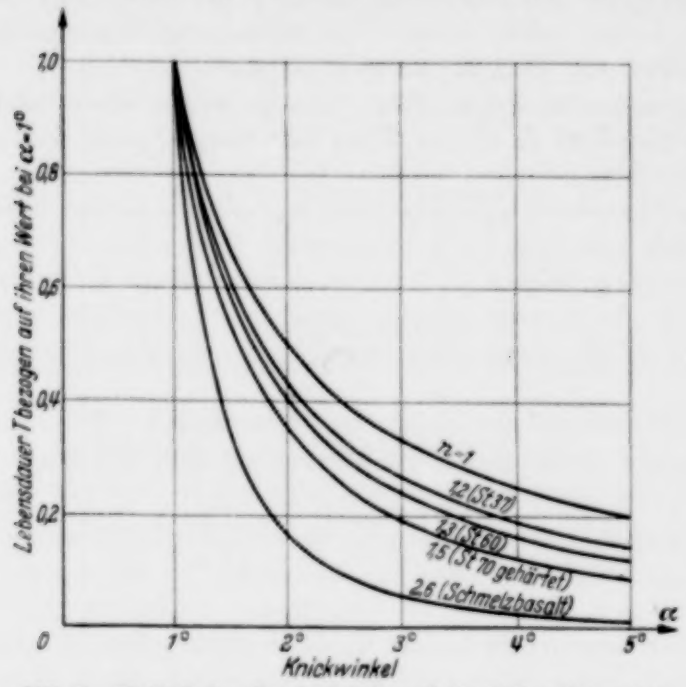


Abb. 5. Einfluß des Knickwinkels auf die Lebensdauer bei gleichmäßiger Wandstärke ($T \sim \alpha^{-n}$).

$$\left.\begin{aligned} z(x) &= n\, t\, \varrho_0, \\ J_{n-1}(x) &= (n-1)\, t\, \varrho_0^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}\right| \qquad (34)$$

und nach Elimination von t

$$z(x) = \frac{n}{n-1} \frac{J_{n-1}(x)}{\varrho_0^{\frac{1}{n-1}}} \qquad (35)$$

als Grenze des Gültigkeitsbereiches der Lösung (27). Für größere z-Werte erhält man formal aus (34) durch Elimination von ϱ_0 eine zweite Lösung

$$z(x, t) = n\, t^{1/n} \left[\frac{J_{n-1}(x)}{n-1}\right]^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (36)$$

Sie erfüllt die Differentialgleichung (17) und die Randbedingung (35), womit ihre Richtigkeit nachgewiesen ist.

Durch Wegfall des Parameters ξ in (36) wird die Diskussion erleichtert: Von Interesse ist, daß $z \sim t^{1/n}$ ist, also die Verschleißgeschwindigkeit in Strahlrichtung mit wachsender Zeit umso mehr abnimmt, je größer n ist. Ferner ist jetzt $z(x)$ von $J_{n-1}(x)$, das heißt von dem ϱ-Verlauf zwischen 0 und x abhängig, während für $n = 1$ $z(x) \sim \varrho(x)$ war. Wenn im Bereich der zweiten Lösung, dann liegt das Muldentiefste auf der Kurve

$$z(x) = \frac{n}{n-1} \frac{J_{n-1}(x)}{\varrho^{\frac{1}{n-1}}(x)}, \qquad (37)$$

wie man durch Einsetzen von (36) in (12) und Elimination von t bei nochmaliger Verwendung von (36) leicht erkennt; das Muldentiefste wandert dann mit wachsender Zeit immer weiter vom Plattenanfang $x = 0$ weg. Die Verschleißkurve besitzt im Bereich dieser Lösung einen stetigen Verlauf ohne Eckenbildung. Dagegen kann die zweite Lösung mit einer Ecke an die erste Lösung anschließen, wenn $\varrho(x)$ in $x = 0$ seinen Größtwert besitzt; auf den Nachweis hierfür soll verzichtet werden.

Es ist nicht sicher, ob bei der Strömung in einem Rohr $\varrho(x)$ an den Rändern $x = 0$ und $x = 2$ Null oder endlich anzunehmen ist. Sehr wahrscheinlich kann man $\varrho'(x) > 0$ in $x = 0$ voraussetzen. Dann kann bewiesen werden, daß das Muldentiefste innerhalb einer immer größeren Zeit t im Bereich der ersten Lösung liegt, je kleiner ϱ_0 ist; bei nicht zu großem ϱ_0 wird daher die genannte Unsicherheit nicht von wesentlicher Bedeutung sein.

9. Zahlenbeispiel I. Ein einfaches Zahlenbeispiel

$$\varrho(x) = 1 - x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \text{für } n = 2$$

für die ebene Platte ergibt eine geschlossene Lösung und zeigt die beiden Lösungsbereiche.

Nach (20) wird $J_1(x) = x - x^2/2$ und damit (27)

$$z(x, t) = \xi + 2\, t(1 - \xi),$$

$$-\frac{1}{2}(1 - x)^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)(1 - \xi)^2.$$

Nach Elimination von ξ folgt daraus die erste Lösung

$$z(x,t) = 1 - \frac{1-x}{\sqrt{1-2t}}.$$

Die Verschleißkurven $z(x)$ sind also Geraden. Die Gültigkeitsgrenze dieser Lösung ist nach (35) die Kurve $z = 2x - x^2$. Anschließend gilt die zweite Lösung

$$z(x,t) = 2\sqrt{J_1(x)\,t}.$$

Im Bereich dieser Lösung liegt nach (37) das Muldentiefste

$$z(x) = x\frac{2-x}{1-x}.$$

Abb. 6 zeigt die Verschleißkurven dieses Falles.

10. Zahlenbeispiel II. Für die ebene Platte wählen wir weiterhin das Beispiel (Abb. 9)

$$\varrho(x) = \frac{0{,}081\,x}{x^2 - 0{,}119\,x + 0{,}01} \qquad (0 \leq x \leq 2).$$

Hierbei ist $\varrho(0) = 0$, $\varrho(0{,}1) = 1 = \text{Max}$. An den Stellen $x_{W1} = 0{,}04218$ und $x_{W2} = 0{,}1483$ sind Wendepunkte. Diese Kurve mag grundsätzlich etwa den Verlauf der Energieverteilung

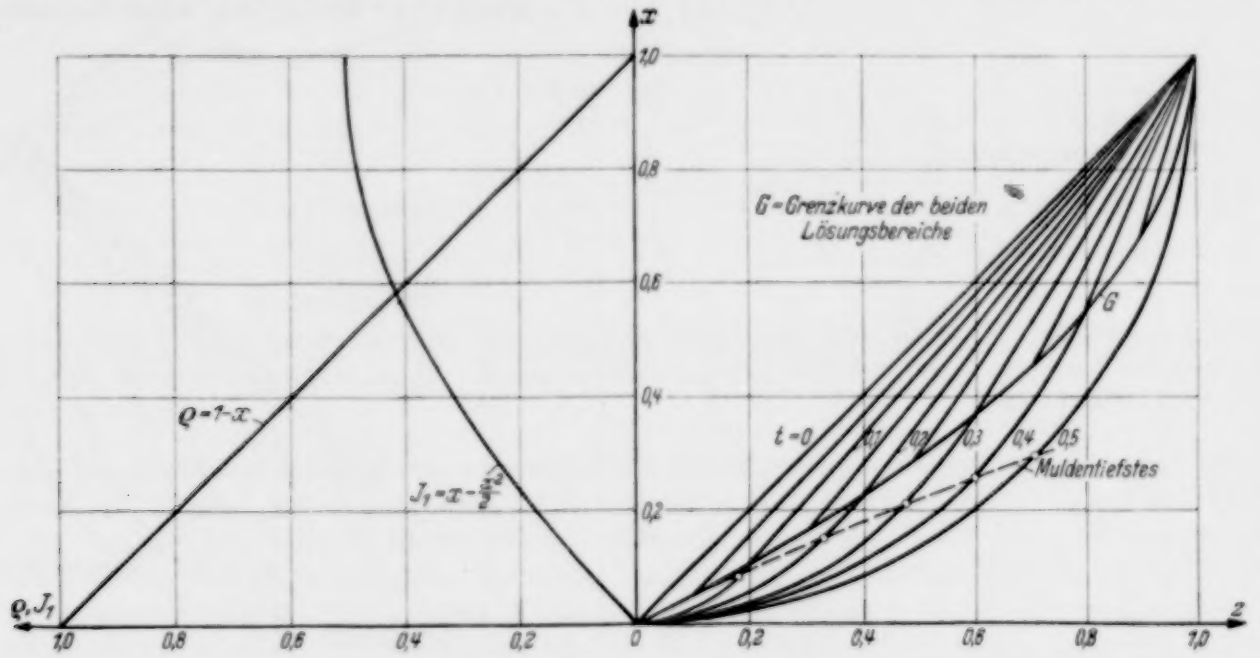


Abb. 6. Verschleißkurven für Beispiel I.

im vertikalen Mittelschnitt durch ein Blasversatzrohr wiedergeben. Wir berechnen $z(x,t)$ für einige Werte n. Der Bereich $1 < x \leq 2$ wird als uninteressant weggelassen.

Für $n = 1$ folgt aus (17) die stetige Kurvenschar von Abb. 7. Wegen der Voraussetzung kleiner Anstrahlwinkel ist nach (13) der schraffierte Lösungsbereich ungültig. Nach (12) und (17) liegt das Muldentiefste unabhängig von t stets an der Stelle $x = x_D = 0{,}1$.

Die Lösungen für $n = 1{,}2;\ 2{,}0;\ 2{,}6$ nach (27) sind in Abb. 8 bis 10 dargestellt. Für den Fall $n = 2$ sind in Abb. 9 links außer $\varrho(x)$ auch $J_1(\xi)$ und für $t = 0{,}2$ die Kurven $\bar{J}_1(\xi)$ und $\bar{z}(\xi)$ dargestellt. Gemäß Abschn. **7b** besitzen beide Kurven ihr Maximum und Minimum jeweils an den gleichen Stellen ξ_i, die beiderseits des Wendepunktes $\xi_{W2} = 0{,}1483$ liegen. Im rechten Teil der Abb. 9 ergeben diese beiden Extremwerte die beiden Spitzen der Kurve $z(x)$ für $t = 0{,}2$, und die Ecke (Doppelpunkt) liegt bei etwa $x = 0{,}4$. Der gestrichelte Teil der Verschleißkurve mit den beiden Spitzen ist für höhere Werte t weggelassen. Die Ecke tritt nach (29), (30) und (31) erstmals auf bei $t_E = 0{,}1052$, $x_E = 0{,}27$ und $z_E = l_E = 0{,}3248$, also $r_E = 0{,}0584$. Das Muldentiefste nach (12) wandert von $x = 0{,}1$ mit wachsendem t zu größeren Werten x. Gegenüber $n = 1$ sind die Kurven völliger und erstrecken sich bis zu höheren Werten x. Bemerkenswert ist der geringe Verschleiß hinter der Ecke im Vergleich zu der davorliegenden Mulde.

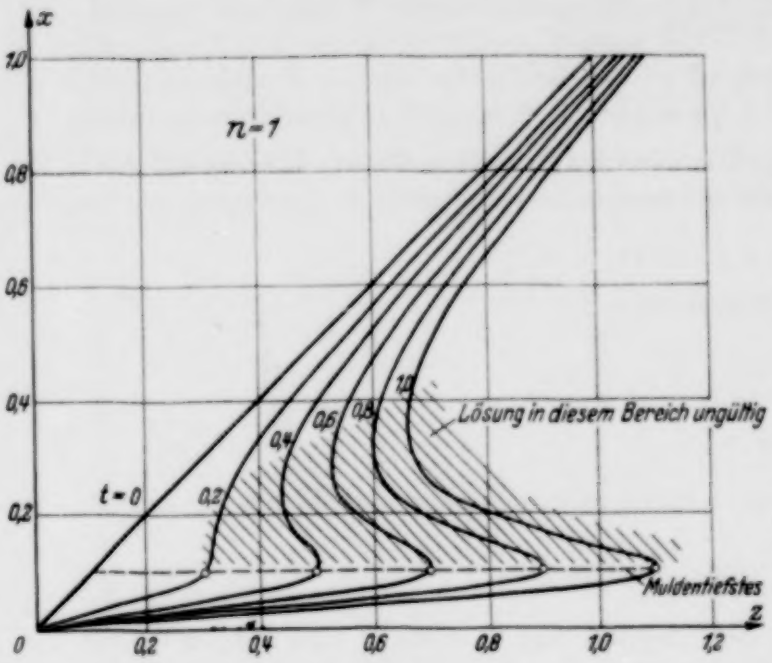


Abb. 7.

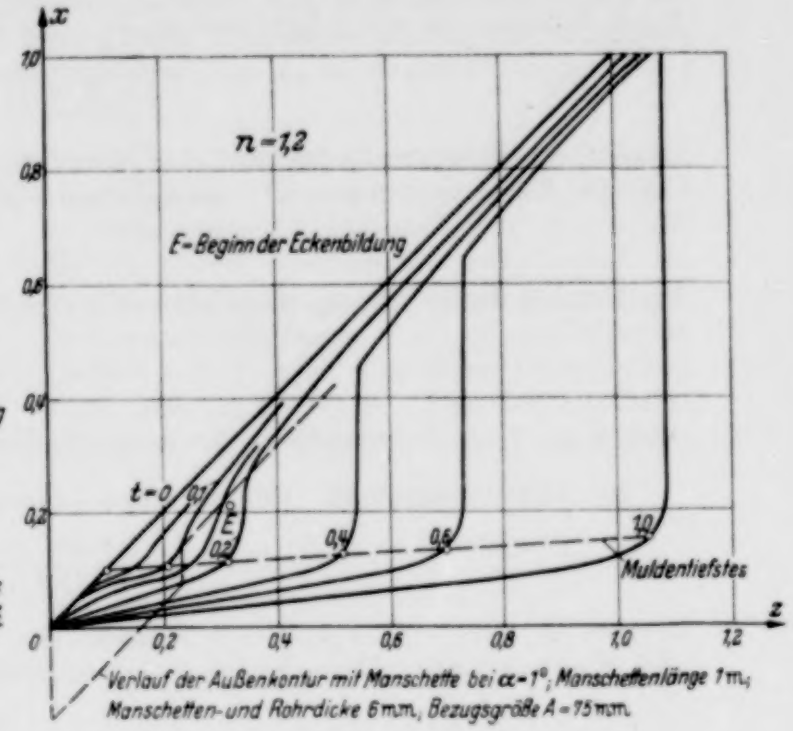


Abb. 8.

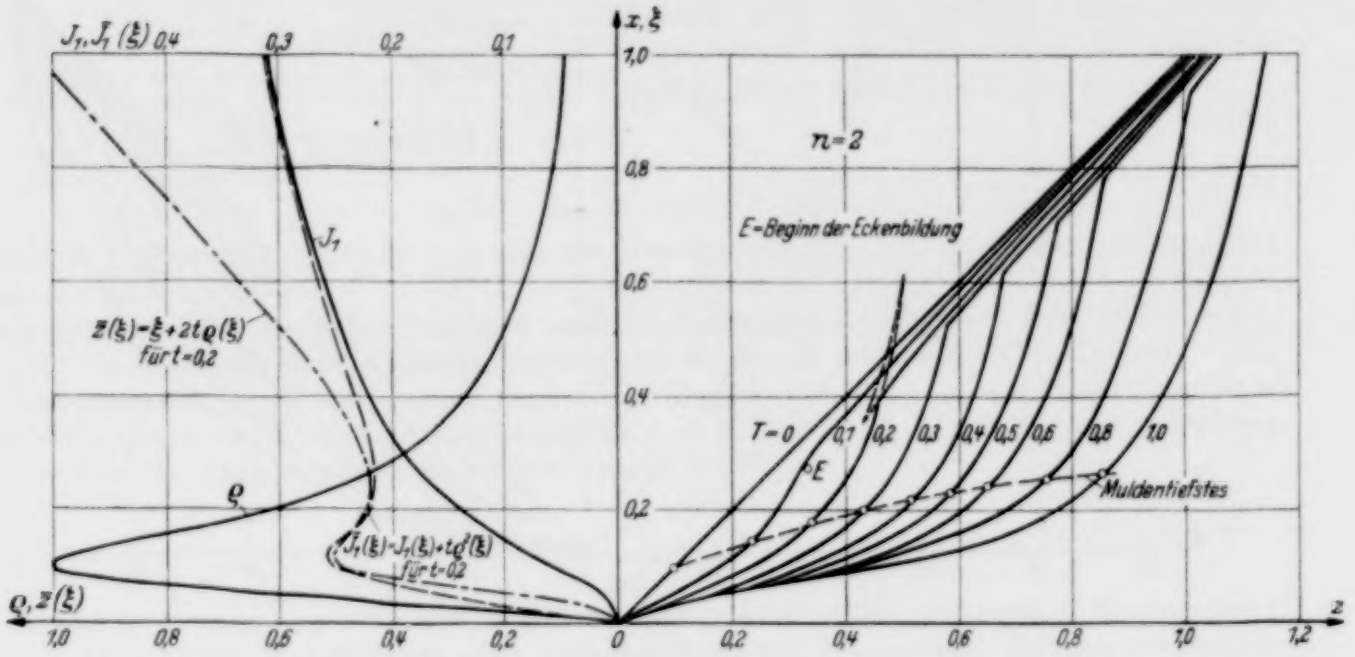


Abb. 9.

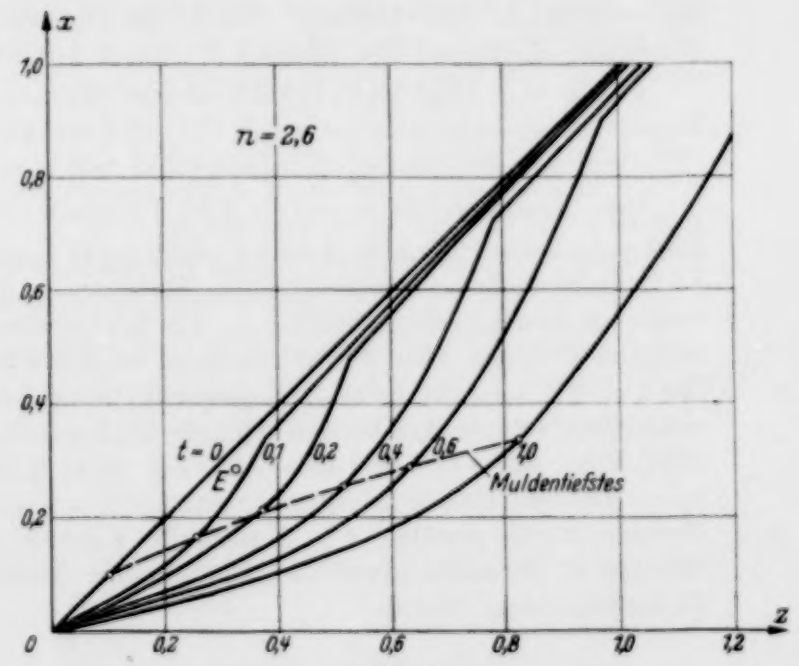


Abb. 10.

Abb. 7—10. Verschleißkurven für Beispiel II und verschiedene Werte *n*.

Der Vergleich aller Ergebnisse zeigt, daß mit wachsendem n die Mulden $z(x)$ länger und flacher werden. Dies zeigt auch der Verlauf von r_D und l_E über t nach Abb. 11 und 12. Die Fortschreitgeschwindigkeiten von l_D, r_D und l_E, r_E nehmen mit wachsendem t umso mehr ab, je größer n ist. Außerdem ist $dl_D/dt \geqq dr_D/dt$, das heißt das Muldentiefste wandert zu größeren x-Werten; bei kleinen Knickwinkeln schreitet es somit nach (11) sehr rasch längs der Platte fort. Ein auf einen

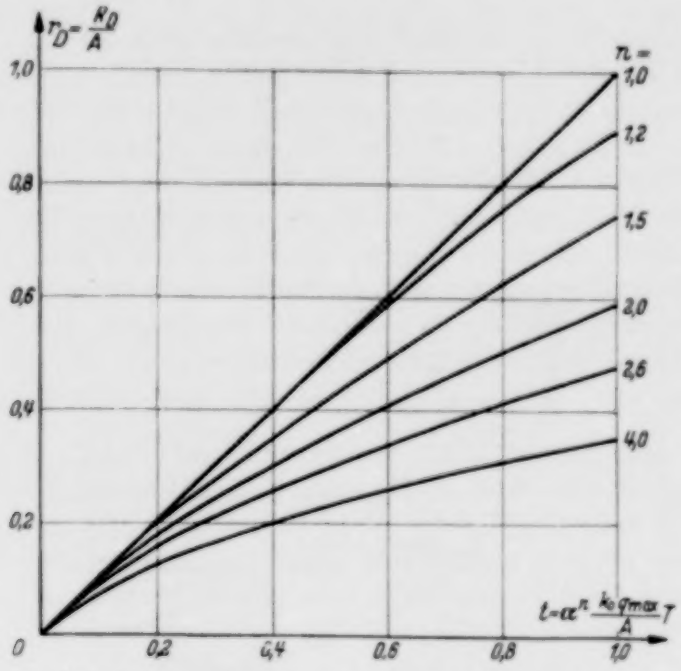


Abb. 11. Verschleiß R_D des Muldentiefsten quer zur Platte über der Zeit T für Beispiel II.

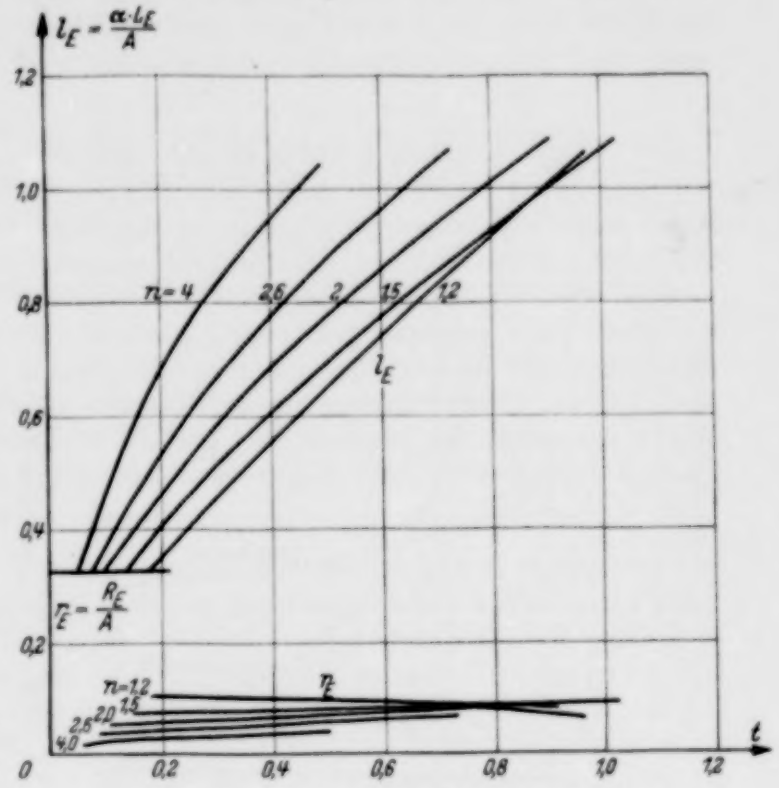


Abb. 12. Lage l_E, r_E der Ecke für Beispiel II.

Durchschlag aufgesetzter Flicken ist also nur dann wirksam, wenn er hinreichend weit über das Ende des Loches hinausragt. Noch rascher als das Muldentiefste wandert die Ecke weiter ($dl_E/dt > dl_D/dt$).

11. Vergleich der Lebensdauer verschiedener Werkstoffe für Beispiel II. Für den speziellen Verlauf der Energiedichte von Beispiel II und für $k_0 q_{max} = c$ nach (1), (2), (10) und (16), also für die Verhältnisse der *Wellinger*schen Sandstrahlversuche soll die Lebensdauer homogener planparalleler Platten verglichen werden. Nimmt man etwa entsprechend den Verhältnissen beim Blasversatzrohr $A = 75$ mm (Rohrhalbmesser), $R_{max} = 12$ mm bei Stahl (Rohr einschließlich Verstärkungsmanschette) und 24 mm bei Basalt an, so folgt nach (11) $r_{max} = 0{,}16$ bzw. 0,32 und aus Abb. 11 in den vier Fällen (1) der Augenblick des Durchschlages zu

$$t = 0{,}162\,;\ 0{,}164\,;\ 0{,}168\,;\ 0{,}557\,.$$

Nach (16) wird dann die Lebensdauer in Stunden für

$$\left.\begin{array}{ll} \text{St 37} & T = 1\,230\,\alpha^{-1{,}2} \\ \text{St 60} & T = 1\,925\,\alpha^{-1{,}3} \\ \text{St 70 gehärtet} & T = 6\,220\,\alpha^{-1{,}5} \\ \text{Schmelzbasalt} & T = 15\,500\,\alpha^{-2{,}6} \end{array}\right\} \quad (\alpha \text{ in Grad}).$$

Die auf St 60 bezogenen Lebensdauerwerte der drei übrigen Werkstoffe sind in Abb. 13 über α aufgetragen. Demnach ist das Lebensdauerverhältnis verschiedener Werkstoffe keine Konstante, sondern vom Knickwinkel abhängig. Beim Vergleich von Stählen ist diese Abhängigkeit nicht sehr ausgeprägt. In dem praktisch interessierenden Knickwinkelbereich sind harte Stähle durchweg verschleißfester als weiche; mit wachsendem Knickwinkel werden die Unterschiede geringer. Wesentlich anders verhält sich Schmelzbasalt, der (mit doppelter Wandstärke) bei $\alpha = 1°$ etwa die 8fache, bei 5° jedoch nur noch dieselbe Lebensdauer wie St 60 besitzt.

Demnach wäre das gute Verhalten von Schmelzbasalt bei sorgfältiger Verlegung folgendermaßen erklärbar: Bei gleicher Wandstärke und wenn Anstrahlwinkel gleich Knickwinkel wäre, so wäre das Lebensdauerverhältnis von Basalt und St 60 der Kehrwert des Verhältnisses

ihrer Verschleißgeschwindigkeiten nach (1), also bei 1° gleich 2,36, bei 5° gleich 0,29. Durch die angenommene doppelte Wandstärke von Basalt werden diese Zahlen verdoppelt. Die verschiedenartige Ausbildung der Mulde steigert diese Verhältniszahlen auf 8 bzw. 1. In der Größenordnung stimmen diese Zahlen mit der praktischen Erfahrung überein.

12. Der Einfluß einer Verstärkungsmanschette. An Beispiel II soll der grundsätzliche

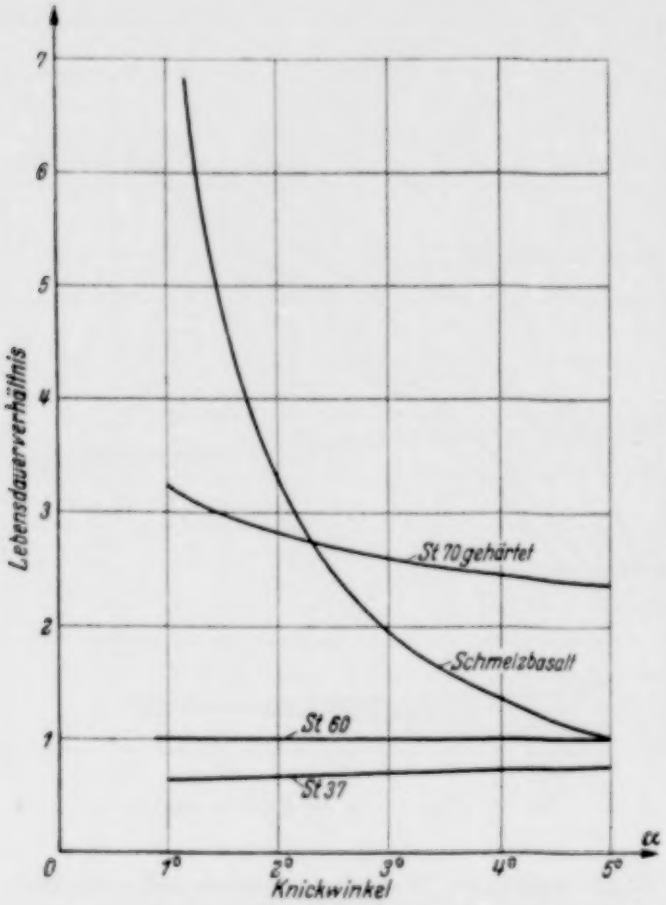


Abb. 13. Lebensdauerverhältnis verschiedener Werkstoffe über dem Knickwinkel für Beispiel II$_2^r$ (Schmelzbasalt doppelte Wandstärke).

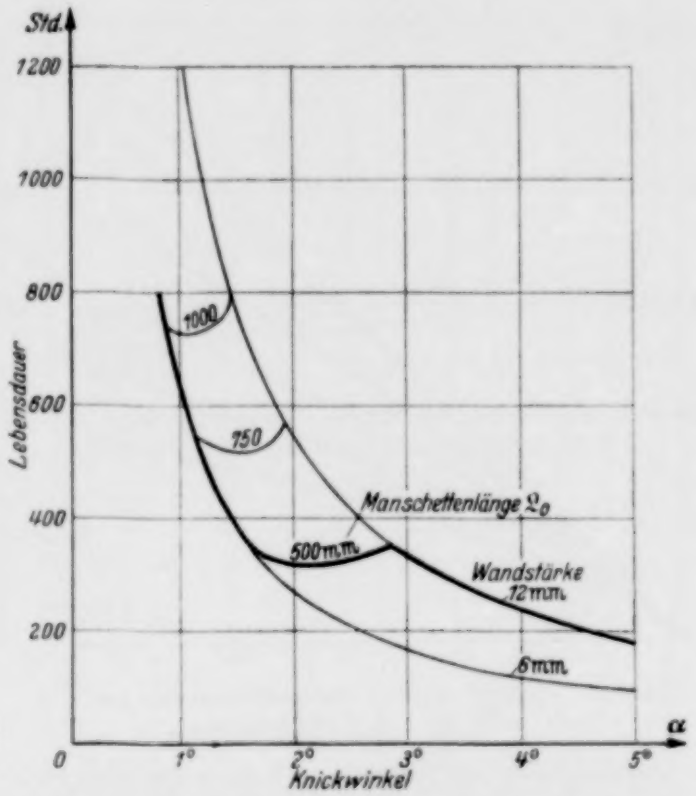


Abb. 14. Lebensdauer über dem Knickwinkel bei verschiedenen Längen der Einströmmanschette für Beispiel II und St 37 (dick gezeichnet $\mathfrak{L}_0 = 500$ mm bei $A = 75$ mm).

Einfluß einer Verstärkungsmanschette am Einströmende eines Rohres auf die Lebensdauer berechnet werden für den Fall $n = 1{,}2$ (St 37). Mit $A = 75$ mm, $R_{max} = 12$ mm längs der Manschette von der Länge $\mathfrak{L}_0$ und 6 mm hinter der Manschette wird nach (11) $l_0 = z_0 = \alpha\, \mathfrak{L}_0 / A$. Für $\alpha = 1°$, $\mathfrak{L}_0 = 1000$ mm ist die Außenkontur der entsprechenden Platte im x, z-Diagramm

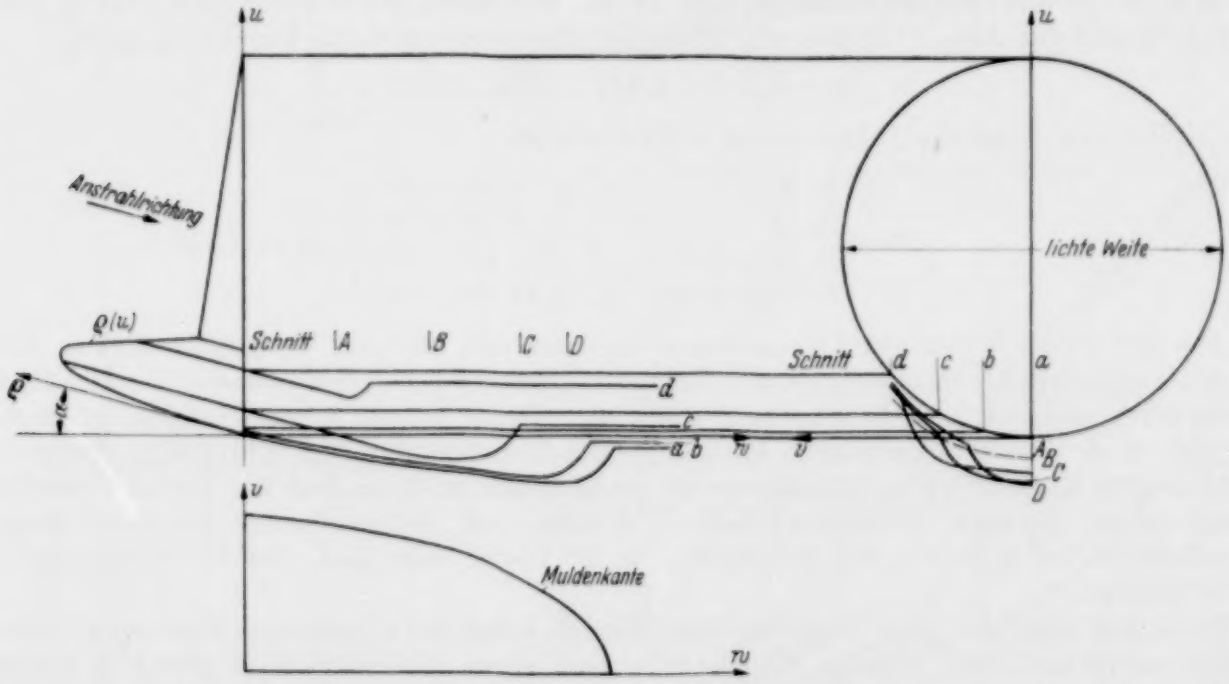


Abb. 15. Beispiel für das räumliche Problem der Muldenbildung im Blasversatzrohr bei $n = 1$.

in Abb. 8 eingetragen. In diesem Falle tritt der Durchschlag bei $t = 0{,}095$ am Manschettenende auf. Für verschiedene Werte α und $\mathfrak{L}_0$ erhält man auf entsprechende Weise die Lebensdauer, Abb. 14. Die Lebensdauerkurven über α setzen sich aus drei Abschnitten zusammen: Für kleine Knickwinkel liegt der Durchschlag hinter dem Manschettenende (untere Hyperbel), für einen mittleren α-Bereich wie oben unmittelbar am Manschettenende (Querkurve), für große Knickwinkel längs der Manschette (obere Hyperbel). Man erkennt die gute Wirkung einer Manschette genügender Länge. Eine k u r z e Manschette ist dagegen bei guter Verlegung w i r k u n g s l o s.

13. Zum räumlichen Problem des Rohrverschleißes. Zur Erklärung des in Abschnitt **1** beschriebenen räumlichen Verlaufes der Muldenbildung haben wir über dem Einströmquerschnitt (rechtwinklige Koordinaten u, v) eine einfache Energieverteilung $\varrho\,(u)$ unabhängig von v angenommen (Abb. 15) und für den Fall $n = 1$, dessen Lösung (18) nach Abschnitt **6a** auch beim räumlichen Problem gültig ist, die Muldenkurven konstruiert. Um auch hier eine Eckenbildung zu erhalten, haben wir diese Ecke bereits in der ϱ-Kurve angenommen. Mit wachsendem v wird im Längsschnitt u, w die Mulde kürzer und weniger tief, und in der Draufsicht v, w wird die Muldenkante zu einer Ellipse. Die verschiedenen Querschnitte A bis D geben den genannten Charakter der Mulde grundsätzlich wieder. Die Gestalt der Mulde ist damit auch beim räumlichen Rohrproblem, wenn auch mit vereinfachenden Annahmen, grundsätzlich erklärt.

14. Schlußbemerkung. Die vorliegende Theorie konnte alle wesentlichen Merkmale der Muldenbildung wiedergeben und zur Klärung der Zusammenhänge beim Verschleiß flachwinklig angestrahlter Platten und Rohre beitragen. Wegen der unvermeidlichen speziellen Annahmen ist dabei das Hauptgewicht weniger auf zahlenmäßig genaue Übertragung der Rechenergebnisse als auf die grundsätzlichen Erkenntnisse zu legen.

(Eingegangen am 17. April 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Maier*, Nürnberg, Torwartstr. 27.

Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten.

(II. Mitteilung)

Von **Th. Pöschl.**

1. In der ersten Mitteilung [1] über diesen Gegenstand (im folgenden als I zitiert) wurde gezeigt, daß es für gewisse Fragen aus der Dynamik der Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden vorteilhaft ist, die Zeit t mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung in der *Euler-Maupertuis*schen oder besser in der *Jacobi*schen Form zu eliminieren [2], wodurch die Ordnung des Systems um zwei Einheiten herabgesetzt wird. Besonders durchsichtig werden die Verhältnisse bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden, für welche *eine* Differentialgleichung zweiter Ordnung übrigbleibt. Die Frage der Hauptschwingungen von Systemen mit endlichen Schwingweiten stellt eines der Probleme dar, die auf diese Weise behandelt werden können, Probleme, die bislang nur für (sogenannte) kleine Schwingungen gelöst werden konnten. Als typisches Beispiel für die hierher gehörigen Probleme wurde das Doppelpendel gewählt.

Das wichtigste in I erhaltene Ergebnis bestand in der Aufstellung der Differentialgleichung für die Grenzkurven; diese stellen Bedingungen dar, durch welche die Koordinaten x, y oder φ, ψ für die zu gleichen Zeiten erreichten Umkehrpunkte der endlichen Schwingungen des zweigliedrigen Systems miteinander verbunden sind.

Wenn die kinetische Energie T und die potentielle Energie V für das zweigliedrige System in geeigneten generalisierten Koordinaten x, y, durch die Ausdrücke gegeben sind

$$T = \frac{1}{2}\,(c\,\dot{y}^2 + 2\,b\,\dot{y}\,\dot{x} + a\,\dot{x}^2), \quad V = V(x, y), \tag{1}$$

worin a, b, c und V irgend welche Funktionen von x und y mit den erforderlichen Eigenschaften sind, so lautet die Differentialgleichung für die Grenzkurven

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\,\frac{b\,\dfrac{\partial V}{\partial x} - c\,\dfrac{\partial V}{\partial y}}{a\,\dfrac{\partial V}{\partial x} - b\,\dfrac{\partial V}{\partial y}} = -\,\frac{\begin{vmatrix} b, & c \\ V_y, & V_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ V_y, & V_x \end{vmatrix}}\,. \tag{2}$$

Als Anfangsbedingungen für y' kommen die zwei Werte in Betracht, die den beiden „Hauptschwingungen“ (im gewöhnlichen Sinne) entsprechen und durch die „kleinen Schwingungen“ bekannt sind. Der Anfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ (oder $\varphi = 0$, $\psi = 0$) der Bildebene stellt einen singulären Punkt dar, und die einzelnen Hauptschwingungen sind durch die verschiedenen Werte der Konstanten h in der Energiegleichung

$$T + V = h \tag{3}$$

gekennzeichnet.

2. In der vorliegenden Mitteilung wird bewiesen, daß die Differentialgleichung (2), die in I aus der *Euler-Lagrange*schen Gleichung des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Form

$$\delta \int \sqrt{2(h - V)}\,ds = 0 \tag{4}$$

für die Grenzlagen, also für $T = h - V = 0$ erhalten wurde, nichts anderes darstellt, als die durch *D. Hilbert* in die Variationsrechnung eingeführte Transversalitätsbedingung für das Variationsproblem mit festem Anfangspunkt ($x = 0$, $y = 0$) und veränderlicher oberer Grenze $h - V(x, y) = 0$, und die seither zu einem fundamentalen Bestandteil der Theorie geworden ist. Dieser Zusammenhang stellt eine Anwendung dieser Bedingung auf ein Problem der analytischen Mechanik dar, die von Interesse sein dürfte.

Zur Kennzeichnung dieser Bedingung möge die folgende Bemerkung dienen: Wir betrachten die einparametrige Schar von Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int_1^2 F(y', y, x)\,dx = 0\,, \tag{5}$$

---

[1] *Th. Pöschl*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 189.

[2] *Th. Pöschl*, Einführung in die Analytische Mechanik, Karlsruhe 1949.

wobei aber die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven nicht durch einen festen Anfangspunkt und einen festen Endpunkt hindurchgehen sollen, sondern für die ein Endpunkt oder beide Endpunkte auf vorgegebenen Kurven liegen sollen.

Im Hinblick auf das vorliegende Problem betrachten wir hier nur den Fall zweier Veränderlicher x, y, wobei die Extremalen durch einen festen Punkt (hier den singulären Punkt $x = 0$, $y = 0$) hindurchgehen sollen, während die Endpunkte der gesuchten Extremalen auf einer festen Kurve $f(x, y) = 0$ liegen sollen. Indem diese Gleichung als Nebenbedingung in das

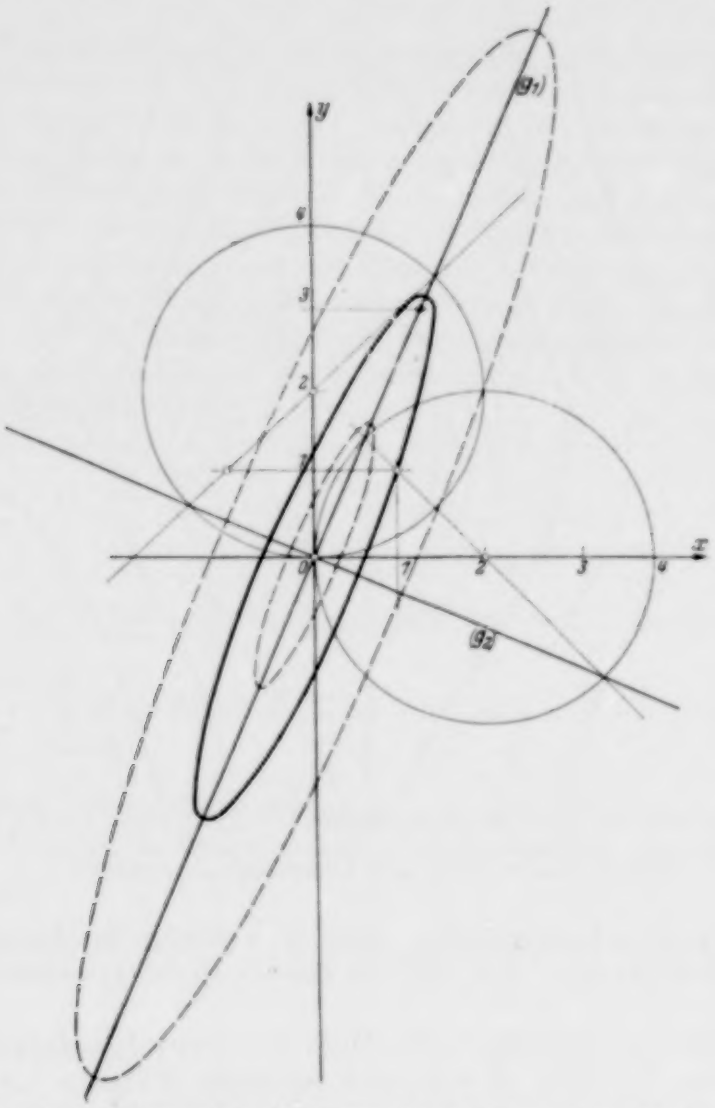


Abb. 1. Orthogonalität der Extremalen zu den Kurven $V =$ konst. beim linearisierten Problem.

Variationsproblem eingeführt wird, gelingt es *Hilbert*, eine Bedingungsgleichung zu erhalten, die die Tangenten der Neigungswinkel der gesuchten Extremalen und der festen Randkurve für den oberen Endpunkt, d. s. die Ableitungen y' und Y' miteinander in Verbindung bringt.

Diese Transversalitätsbedingung lautet

$$F(y', y, x) + (Y' - y')\, F_{y'} = 0\,, \tag{6}$$

wobei Y' durch totale Ableitung nach x aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ gewonnen wird:

$$f_x + f_y Y' = 0\,, \quad Y' = -\,f_x/f_y\,. \tag{7}$$

Für das *Jacobi*sche Wirkungsintegral ist (in geänderter Bezeichnung gegen I) zu setzen

$$F = \sqrt{2\,(h - V(x, y))}\,\sqrt{a\,y'^2 + 2\,b\,y' + c}\,, \tag{8}$$

und die Bedingung (6) nimmt die Form an

$$y' = -\,\frac{bV_x - cV_y}{aV_x - bV_y}\,, \tag{9}$$

die mit der Gleichung (24) von „I“ übereinstimmt.

Die Grenzkurven, deren Koordinatenpaare x, y, zusammengehörige — d. h. gleichen Werten der Zeit t entsprechende — Ausschläge des zweigliedrigen Systems darstellen, können daher auch in folgender Weise definiert werden: Für jeden Wert von h stellen die Kurven $h - V(x\,y) = 0$ den geometrischen Ort der Punkte dar, in denen die Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ gleichzeitig Null sind. Die Grenzkurven sind dann jene durch den Anfangspunkt (0, 0) gehende Kurven, die in jedem Punkte zu den Kurven $h - V(x, y) = 0$ transversal verlaufen (in der *Hilbert*schen Bezeichnung). Für Systeme mit zwei Freiheitsgraden gibt es zwei solcher Kurven,

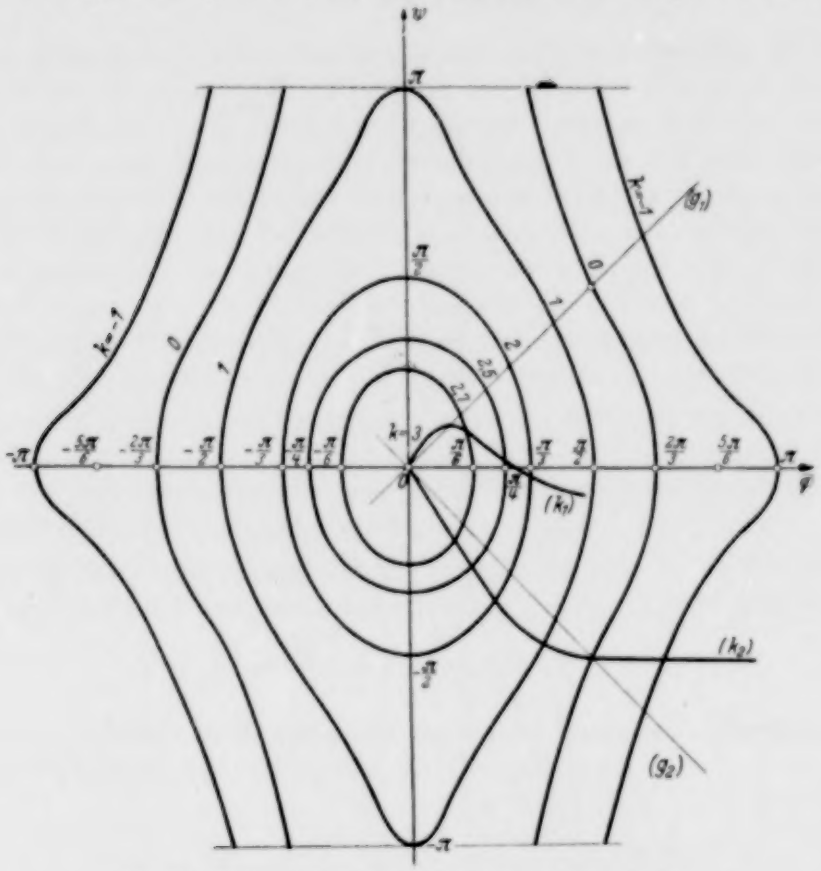


Abb. 2. Transversalität beim nicht-linearisierten Problem.

die dieser Bedingung genügen. Die Grenzwerte der Verhältnisse der Ausschläge im Punkte (0,0) stellen die für kleine Schwingungen, d. h. für das lineare Problem geltenden Werte dieser Ausschläge dar.

In Abb. 1 sind die für das linearisierte Problem des Doppelpendels geltenden Verhältnisse angegeben. Die Kurven $h - V(x, y) = 0$ sind ähnliche Ellipsen und die Transversalität artet zur Orthogonalität aus.

Denn für kleine Schwingungen nimmt das Wirkungsintegral die Form an

$$\int \sqrt{2\,(h - V(x, y))}\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx\,, \tag{10}$$

und hierfür lautet die Transversalitätsbedingung

$$\sqrt{1 + y'^2} + (Y' - y')\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0\,,$$

oder

$$y'\,Y' + 1 = 0\,. \tag{11}$$

Darin ist $Y' = V_y/V_x$ zu setzen. Diese Gleichung besagt, daß die Extremalen des Wirkungsintegrals, die in diesem Fall gerade Linien sind, zu den Kurven $h - V(x, y) = 0$ senkrecht stehen, wie auch aus Abb. 1 zu entnehmen ist.

Abb. 2 zeigt die Kurven für das nicht-linearisierte Doppelpendel in den Koordinaten φ und ψ, für welche die Grenzkurven k_1 und k_2 in jedem Punkte zu der durch ihn gehenden Kurve $h - V(x, y) = 0$ „transversal" verlaufen.

(Eingegangen am 5. Mai 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Th. Pöschl*, Karlsruhe, Wendtstr. 5.

Die strenge Lösung der Eigenwertaufgabe für den Kippstab.

Von E. A. Deuker.

1. Formulierung des Variationsproblems und die spezielle Grundlösung. Ein Träger von der Länge l sei an einem Ende $s = l$ fest eingespannt und am freien Ende $s = 0$ durch eine Kraft P, welche die Richtung einer Hauptträgheitsachse des unverformten Trägers hat, belastet. Wir bezeichnen der Reihe nach die Torsion bzw. die Krümmungen mit ω_1, ω_2 und ω_3, um die Analogie zu den Kreiselgleichungen hervorzuheben, und die zugehörigen konstanten Torsions- bzw. Biegesteifigkeiten mit K_1, K_2 und K_3. Außerdem soll eine eventuelle Flanschenverbiegung berücksichtigt werden, deren Beitrag zum Torsionsmoment proportional zur Änderung der Torsion längs der Trägerachse angenommen wird, mit dem Proportionalitätsfaktor K_4/l^2. Die Richtungen der Trägerachse und der Hauptträgheitsachsen werden durch die *Euler*schen Winkel q_1, q_2, q_3 beschrieben, die so gewählt sind, daß zwischen den ω_i und q_i die drei bekannten Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot \cos q_3 , \\ \omega_2 &= -\dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_1 , \\ \omega_3 &= \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \cos q_1 . \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Die potentielle Energie des Trägers ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K_4}{l^2} \dot{\omega}_1^2 + K_1 \omega_1^2 + K_2 \omega_2^2 + K_3 \omega_3^2 \right) - P \cos q_2 \sin q_3 \right\} ds . \tag{1.2}$$

Wir führen durch Bezug auf die Gesamtlänge dimensionslose Veränderliche ein und nehmen unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen als Ausgangspunkt das Variationsproblem

$$U = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [K_4 \dot{\omega}_1^2 + K_1 \omega_1^2 + K_2 \omega_2^2 + K_3 \omega_3^2] - P l^2 \cos q_2 \sin q_3 \right\} ds = \text{Min.} \tag{1.3}$$

mit den drei Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos q_3 - \omega_1 = 0 , \\ N_2 &= -\dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_1 - \omega_2 = 0 , \\ N_3 &= \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \cos q_1 - \omega_3 = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Es wird sich zeigen, daß man zu übersichtlicheren Gleichungen kommt, wenn man in der potentiellen Energie die ω_i beibehält und sie nicht etwa über die (1.4) durch die *Euler*schen Winkel und ihre Ableitungen ausdrückt, sondern diese Gleichungen als Nebenbedingungen einführt. Man hat es dann allerdings mit einem *Lagrange*schen Variationsproblem zu tun. Diese Formulierung als *Lagrange*sches Variationsproblem darf wohl als die der Aufgabe angemessene Betrachtungsweise angesehen werden. Aus dem Variationsproblem (1.3) mit den Nebenbedingungen (1.4) folgen die sechs Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad K_4 \ddot{\omega}_1 - K_1 \omega_1 + \lambda_1 = 0 , \\ &\text{b)} \quad -K_2 \omega_2 + \lambda_2 = 0 , \\ &\text{c)} \quad -K_3 \omega_3 + \lambda_3 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad \dot{\lambda}_1 - \lambda_2 \omega_3 + \lambda_3 \omega_2 = 0 , \\ &\text{b)} \quad [\lambda_1 \cos q_1 + \sin q_3 (-\lambda_2 \cos q_1 + \lambda_3 \sin q_1)]^{\cdot} - P l^2 \sin q_2 \sin q_3 = 0 , \\ &\text{c)} \quad (\lambda_2 \sin q_1 + \lambda_3 \cos q_1)^{\cdot} + P l^2 \cos q_2 \cos q_3 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Die Grenzkurven, deren Koordinatenpaare x, y, zusammengehörige — d. h. gleichen Werten der Zeit t entsprechende — Ausschläge des zweigliedrigen Systems darstellen, können daher auch in folgender Weise definiert werden: Für jeden Wert von h stellen die Kurven $h - V(x\,y) = 0$ den geometrischen Ort der Punkte dar, in denen die Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ gleichzeitig Null sind. Die Grenzkurven sind dann jene durch den Anfangspunkt (0, 0) gehende Kurven, die in jedem Punkte zu den Kurven $h - V(x, y) = 0$ t r a n s v e r s a l verlaufen (in der *Hilbert*schen Bezeichnung). Für Systeme mit zwei Freiheitsgraden gibt es z w e i solcher Kurven,

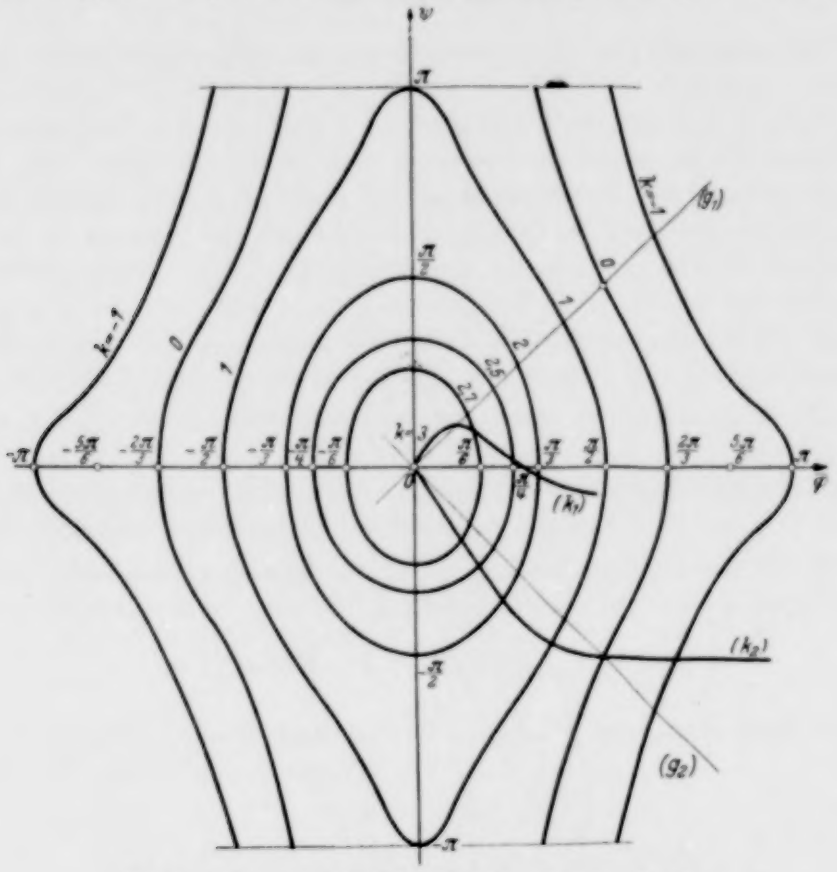


Abb. 2. Transversalität beim nicht-linearisierten Problem.

die dieser Bedingung genügen. Die Grenzwerte der Verhältnisse der Ausschläge im Punkte (0,0) stellen die für kleine Schwingungen, d. h. für das lineare Problem geltenden Werte dieser Ausschläge dar.

In Abb. 1 sind die für das linearisierte Problem des Doppelpendels geltenden Verhältnisse angegeben. Die Kurven $h - V(x, y) = 0$ sind ähnliche Ellipsen und die Transversalität artet zur Orthogonalität aus.

Denn für kleine Schwingungen nimmt das Wirkungsintegral die Form an

$$\int \sqrt{2\,(h - V(x, y))}\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx\,, \tag{10}$$

und hierfür lautet die Transversalitätsbedingung

$$\sqrt{1 + y'^2} + (Y' - y')\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0\,,$$

oder

$$y'\,Y' + 1 = 0\,. \tag{11}$$

Darin ist $Y' = V_y/V_x$ zu setzen. Diese Gleichung besagt, daß die Extremalen des Wirkungsintegrals, die in diesem Fall gerade Linien sind, zu den Kurven $h - V(x, y) = 0$ senkrecht stehen, wie auch aus Abb. 1 zu entnehmen ist.

Abb. 2 zeigt die Kurven für das nicht-linearisierte Doppelpendel in den Koordinaten φ und ψ, für welche die Grenzkurven k_1 und k_2 in jedem Punkte zu der durch ihn gehenden Kurve $h - V(x, y) = 0$ „transversal" verlaufen.

(Eingegangen am 5. Mai 1953.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Th. Pöschl*, Karlsruhe, Wendtstr. 5.

Die strenge Lösung der Eigenwertaufgabe für den Kippstab.

Von E. A. Deuker.

1. Formulierung des Variationsproblems und die spezielle Grundlösung. Ein Träger von der Länge l sei an einem Ende $s = l$ fest eingespannt und am freien Ende $s = 0$ durch eine Kraft P, welche die Richtung einer Hauptträgheitsachse des unverformten Trägers hat, belastet. Wir bezeichnen der Reihe nach die Torsion bzw. die Krümmungen mit ω_1, ω_2 und ω_3, um die Analogie zu den Kreiselgleichungen hervorzuheben, und die zugehörigen konstanten Torsions- bzw. Biegesteifigkeiten mit K_1, K_2 und K_3. Außerdem soll eine eventuelle Flanschenverbiegung berücksichtigt werden, deren Beitrag zum Torsionsmoment proportional zur Änderung der Torsion längs der Trägerachse angenommen wird, mit dem Proportionalitätsfaktor K_4/l^2. Die Richtungen der Trägerachse und der Hauptträgheitsachsen werden durch die *Euler*schen Winkel q_1, q_2, q_3 beschrieben, die so gewählt sind, daß zwischen den ω_i und q_i die drei bekannten Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot \cos q_3 , \\ \omega_2 &= -\dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_1 , \\ \omega_3 &= \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \cos q_1 . \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Die potentielle Energie des Trägers ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K_4}{l^2} \dot{\omega}_1^2 + K_1 \omega_1^2 + K_2 \omega_2^2 + K_3 \omega_3^2 \right) - P \cos q_2 \sin q_3 \right\} ds . \tag{1.2}$$

Wir führen durch Bezug auf die Gesamtlänge dimensionslose Veränderliche ein und nehmen unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen als Ausgangspunkt das Variationsproblem

$$U = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [K_4 \dot{\omega}_1^2 + K_1 \omega_1^2 + K_2 \omega_2^2 + K_3 \omega_3^2] - P l^2 \cos q_2 \sin q_3 \right\} ds = \text{Min.} \tag{1.3}$$

mit den drei Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos q_3 - \omega_1 = 0 , \\ N_2 &= -\dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \sin q_1 - \omega_2 = 0 , \\ N_3 &= \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_3 + \dot{q}_3 \cos q_1 - \omega_3 = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Es wird sich zeigen, daß man zu übersichtlicheren Gleichungen kommt, wenn man in der potentiellen Energie die ω_i beibehält und sie nicht etwa über die (1.4) durch die *Euler*schen Winkel und ihre Ableitungen ausdrückt, sondern diese Gleichungen als Nebenbedingungen einführt. Man hat es dann allerdings mit einem *Lagrange*schen Variationsproblem zu tun. Diese Formulierung als *Lagrange*sches Variationsproblem darf wohl als die der Aufgabe angemessene Betrachtungsweise angesehen werden. Aus dem Variationsproblem (1.3) mit den Nebenbedingungen (1.4) folgen die sechs Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad K_4 \ddot{\omega}_1 - K_1 \omega_1 + \lambda_1 = 0 , \\ &\text{b)} \quad -K_2 \omega_2 + \lambda_2 = 0 , \\ &\text{c)} \quad -K_3 \omega_3 + \lambda_3 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad \dot{\lambda}_1 - \lambda_2 \omega_3 + \lambda_3 \omega_2 = 0 , \\ &\text{b)} \quad [\lambda_1 \cos q_1 + \sin q_3 (-\lambda_2 \cos q_1 + \lambda_3 \sin q_1)]^{\cdot} - P l^2 \sin q_2 \sin q_3 = 0 , \\ &\text{c)} \quad (\lambda_2 \sin q_1 + \lambda_3 \cos q_1)^{\cdot} + P l^2 \cos q_2 \cos q_3 = 0 , \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

die z. T. nur die *Lagrange*schen Faktoren als die entsprechenden Torsions- bzw. Biegemomente definieren.

Mit den Nebenbedingungen (1.4) hat man so neun Gleichungen für die neun Funktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Soweit die Randbedingungen nicht, wie für das eingespannte Ende z. T. direkt vorgegeben sind, mit $q_1(1) = q_2(1) = q_3(1) = 0$, sind sie aus der Randformel der Variationsrechnung zu entnehmen. Die vollständigen Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} s = 0: &\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \dot{\omega}_1 = 0\,, \\ s = 1: &\quad q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0,\ \dot{\omega}_1 = 0\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Die Gleichungen (1.4), (1.5) und (1.6) enthalten als spezielle Lösung die reine Biegung des Trägers durch die Last P mit

$$\begin{aligned} &q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0\,, \\ &\lambda_3 = K_3\,\omega_3,\ \dot{q}_3 = \omega_3,\ \dot{\lambda}_3 + P\,l^2 \cos q_3 = 0\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Wir setzen

$$q_3 = \vartheta,\ \ \omega_3 = \omega,\ \ \frac{P\,l^2}{K_3} = p^2 \tag{1.9}$$

und erhalten dann die reine Biegung als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = -\,p^2 \cos\vartheta \tag{1.10}$$

mit den Randbedingungen

$$\vartheta(1) = 0,\ \ \dot{\vartheta}(0) = 0\,. \tag{1.11}$$

Ein erstes Integral von (1.10) ist

$$\omega^2 = 2\,p^2\,(\sin\vartheta_0 - \sin\vartheta)\,, \tag{1.12}$$

mit dem wir im Wesentlichen für die weiteren Betrachtungen auskommen. Die vollständige Lösung wird durch elliptische Funktionen beschrieben und lautet

$$\omega = -\,2\,k\,p\,\mathrm{cn}\,(K - p\,s)\,, \tag{1.13}$$

$$\cos\vartheta = 2\,k\,\mathrm{sn}\,(K - p\,s)\,\mathrm{dn}\,(K - p\,s)\,, \tag{1.14}$$

$$\sin\vartheta = 2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,(K - p\,s) - 1\,, \tag{1.15}$$

wobei noch der Modul

$$k = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta_0}{2}\right) \tag{1.16}$$

aus der Gleichung

$$\mathrm{sn}\,(K - p) = \frac{1}{\sqrt{2}\,k} \tag{1.17}$$

bzw. der äquivalenten Gleichung

$$\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\cdot k}}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = p \tag{1.17a}$$

zu bestimmen wäre.

2. Berechnung der zweiten Variation für die Grundlösung, Aufstellung der *Jakobi*schen Gleichung und ihre Reduktion auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Um festzustellen, ob die Gleichgewichtslage der reinen Biegung stabil ist, hat man die zweite Variation zu bilden und ihr Vorzeichen, insbesondere die Möglichkeit ihres Verschwindens für die zulässigen Variationen zu untersuchen. Da ein *Lagrange*sches Variationsproblem vorliegt, kommt man nicht mit der einfachsten Klasse einparametriger Variationen aus, d. h. in der zweiten

Variation der potentiellen Energie treten auch zweite Variationen der Veränderlichen auf. Man erhält so

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 U = \frac{1}{2}\int_0^1 (&K_4\,\delta\dot{\omega}_1^2 + K_1\,\delta\omega_1^2 + K_2\,\delta\omega_2^2 + K_3\,\delta\omega_3^2 + K_3'\,p^2\sin\vartheta\,\delta q_3^2 \\ &+ K_3\,p^2\sin\vartheta\,\delta q_2^2 + K_3\,\omega\,\delta^2\omega_3 - K_3\,p^2\cos\vartheta\,\delta^2 q_3)\,ds\,,\end{aligned}\right| \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta N_1 &= \delta\dot{q}_1 + \cos\vartheta\,\delta\dot{q}_2 - \delta\omega_1 = 0\,,\\ \delta N_2 &= -\sin\vartheta\,\delta\dot{q}_2 + \omega\,\delta q_1 - \delta\omega_2 = 0\,,\\ \delta N_3 &= \delta\dot{q}_3 - \delta\omega_3 = 0\,.\end{aligned}\right| \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 N_1 &= \frac{1}{2}(\delta^2\dot{q}_1 + \cos\vartheta\,\delta^2\dot{q}_2 - 2\sin\vartheta\,\delta\dot{q}_2\,\delta q_3 - \delta^2\omega_1) = 0\,,\\ \delta^2 N_2 &= \frac{1}{2}(-\sin\vartheta\,\delta^2\dot{q}_2 - 2\cos\vartheta\,\delta q_2\,\delta q_3 + \omega\,\delta^2 q_1 + 2\,\delta q_1\,\delta\dot{q}_3 - \delta^2\omega_2) = 0\,,\\ \delta^2 N_3 &= \frac{1}{2}(2\sin\vartheta\,\delta q_1\,\delta\dot{q}_2 - \omega\,\delta q_1^2 + \delta^2\dot{q}_3 - \delta^2\omega_3) = 0\,.\end{aligned}\right| \tag{2.3}$$

Multipliziert man die Gleichung (2.3) mit den *Lagrange*schen Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und addiert sie zu (2.1), wodurch die zweite Variation nicht verändert wird, so lassen sich die zweiten Variationen der Veränderlichen beseitigen; denn es folgt

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 U = \frac{1}{2}\int_0^1 (&K_4\,\delta\dot{\omega}_1^2 + K_1\,\delta\omega_1^2 + K_2\,\delta\omega_2^2 + K_3\,\delta\omega_3^2 + K_3\,p^2\sin\vartheta\,\delta q_3^2 \\ &+ K_3\,p^2\sin\vartheta\,\delta q_2^2 + 2\,K_3\sin\vartheta\,\omega\,\delta q_1\,\delta\dot{q}_2 - K_3\,\omega^2\delta q_1^2)\,ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 (K_3\,\omega\,\delta^2 q_3)^{\cdot}\,ds\,,\end{aligned}\right| \tag{2.4}$$

und der letzte, integrable Term in (2.4) verschwindet. Unter Berücksichtigung von (2.2) läßt sich die zweite Variation auch in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 U = \frac{1}{2}\int_0^1 [&K_4\,\delta\dot{\omega}_1^2 + K_1\,\delta\omega_1^2 + K_3\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\,\delta\dot{q}_2^2 + p^2\,\delta q_2^2) \\ &+ K_3\,\delta\omega_3^2 + K_3\,p^2\sin\vartheta\,\delta q_3^2 - (K_3 - K_2)\,\delta\omega_2^2]\,ds\,,\end{aligned}\right| \tag{2.5}$$

aus der unmittelbar hervorgeht, daß nur im Falle $K_3 > K_2$ die zweite Variation das Vorzeichen wechseln, d. h. die Gleichgewichtslage der reinen Biegung instabil werden kann.

Dem ursprünglichen Variationsproblem mit der Grundlösung (1.10) bis (1.17) ordnen wir nun in üblicher Weise das quadratische Variationsproblem der zweiten Variation:

$$\delta^2 U = \text{Extr.} \tag{2.6}$$

mit den Nebenbedingungen (2.2) zu, dessen *Euler*sche Gleichungen (*Jakobi*sche Gleichungen) ein System linearer homogener Differentialgleichungen für die ersten Variationen bilden. Für eine Lösung des Systems, welche die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt, verschwindet die zweite Variation, d. h. die ursprüngliche Randwertaufgabe ist nicht mehr eindeutig. Da die Randwerte ebenfalls homogen sind, erhält man eine Eigenwertaufgabe.

Das betreffende System der *Jakobi*schen Gleichungen lautet in unserem Falle

$$K_4\,\delta\ddot{\omega}_1 - K_1\,\delta\omega_1 + \delta\dot{\lambda}_1 = 0\,, \tag{2.7}$$

$$\delta\dot{\lambda}_1 + (K_3 - K_2)\,\omega\,\delta\omega_2 = 0\,, \tag{2.8}$$

$$K_2\,\delta\dot{\omega}_2 + \omega(\delta\lambda_1 - K_3\,\delta\omega_1) + K_3\,p^2\,(\delta q_2 + \cos\vartheta\,\delta q_1) = 0\,, \tag{2.9}$$

$$\delta\ddot{q}_3 - p^2\sin\vartheta\,\delta q_3 = 0\,, \tag{2.10}$$

wobei schon einige Gleichungen zusammengefaßt worden sind, mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} s = 0: &\quad \delta\dot{\lambda}_1 = 0,\ \delta\omega_2 = 0,\ \delta\dot{\omega}_1 = 0,\ \delta\dot{q}_3 = 0, \\ s = 1: &\quad \delta q_1 = 0,\ \delta q_2 = 0,\ \delta q_3 = 0,\ \delta\dot{\omega}_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Gleichung (2.10), die letzte des Systems, ist mit den anderen nicht gekoppelt und hat in Verbindung mit (2.11) nur die Lösung $\delta q_3 \equiv 0$. Von den verbleibenden drei Gleichungen differentieren wir (2.9) noch einmal, um die Variationen δq_2 und δq_1 zu beseitigen, und erhalten

$$K_2\,\delta\ddot{\omega}_2 - K_3\,p^2 \sin\vartheta\,\delta\omega_2 + [\omega(\delta\dot{\lambda}_1 - K_3\,\delta\omega_1)]^{\cdot} - K_3\,\dot{\omega}\,\delta\omega_1 = 0\,. \tag{2.12}$$

Nach Multiplikation der Gleichung (2.12) mit ω kann man sie schreiben:

$$\begin{aligned} &K_2(\omega\,\delta\ddot{\omega}_2 - p^2 \sin\vartheta\,\omega\,\delta\omega_2) + \omega(\omega\,\delta\dot{\lambda}_1)^{\cdot} - K_3(\omega^2\,\delta\omega_1)^{\cdot} \\ &\quad - (K_3 - K_2)\,p^2 \sin\vartheta\,\omega\,\delta\omega_2 = K_2(\omega\,\delta\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}\,\delta\omega_2)^{\cdot} \\ &\quad + \omega(\omega\,\delta\dot{\lambda}_1)^{\cdot} - K_3(\omega^2\,\delta\omega_1)^{\cdot} - (K_3 - K_2)\,p^2 \sin\vartheta\,\omega\,\delta\omega_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

und mit Berücksichtigung von (2.8) erhält man ein totales Differential, nämlich

$$\begin{aligned} &K_2(\omega\,\delta\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}\,\delta\omega_2)^{\cdot} + \omega(\omega\,\delta\dot{\lambda}_1)^{\cdot} - K_3(\omega^2\,\delta\omega_1)^{\cdot} + p^2 \sin\vartheta\,\delta\dot{\lambda}_1 \\ &= K_2(\omega\,\delta\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}\,\delta\omega_2)^{\cdot} - K_3(\omega^2\,\delta\omega_1)^{\cdot} + [(\omega^2 + p^2 \sin\vartheta)\,\delta\lambda_1]^{\cdot} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Durch Integration folgt

$$K_2(\omega\,\delta\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}\,\delta\omega_2) - K_3\,\omega^2\,\delta\omega_1 + (\omega^2 + p^2 \sin\vartheta)\,\delta\lambda_1 = 0; \tag{2.15}$$

denn wegen $\omega(0) = 0$ und wegen der Randbedingungen (2.11) ist die Integrationskonstante gleich Null zu setzen. Nach Division durch ω^2 folgt schließlich

$$K_2\left(\frac{\delta\omega_2}{\omega}\right)^{\cdot} - K_3\,\delta\omega_1 + \frac{\omega^2 + p^2 \sin\vartheta}{\omega^2}\,\delta\lambda_1 = 0\,. \tag{2.16}$$

Dividiert man andererseits auch Gleichung (2.8) durch ω^2 und differentiiert einmal:

$$\left(\frac{\delta\dot{\lambda}_1}{\omega^2}\right)^{\cdot} + (K_3 - K_2)\left(\frac{\delta\omega_2}{\omega}\right)^{\cdot} = 0, \tag{2.17}$$

so läßt sich $\frac{\delta\omega_2}{\omega}$ leicht eliminieren und man erhält

$$K_2\left(\frac{\delta\dot{\lambda}_1}{\omega^2}\right)^{\cdot} + (K_3 - K_2)\left[K_3\,\delta\omega_1 - \left(\frac{\omega^2 + p^2 \sin\vartheta}{\omega^2}\right)\delta\lambda_1\right] = 0\,. \tag{2.18}$$

An die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung (2.7) u. (2.18) schließen nun die weiteren Ausführungen zum Eigenproblem an.

3. Zurückführung der Eigenwertaufgabe auf eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern. Wir führen neue Bezeichnungen und Abkürzungen dadurch ein, daß wir setzen

$$\delta\dot{\lambda}_1 = K_1\,u, \quad \delta\omega_1 = v, \quad \omega = p\,w, \quad \frac{\omega^2 + p^2 \sin\vartheta}{\omega^2} = q(s)\,, \tag{3.1}$$

$$\frac{K_1}{K_4} = \nu^2, \qquad \frac{K_1}{K_3} = \mu, \tag{3.2}$$

und als Eigenwertparameter wählen wir

$$\lambda = \frac{K_3(K_3 - K_2)}{K_1 K_2}\,p^2. \tag{3.3}$$

Dann schreiben sich die Gleichungen (2.7) u. (2.18) in der Form

$$\begin{aligned} &\ddot{v} - \nu^2\,v + \nu^2\,u = 0\,, \\ &\left(\frac{\dot{u}}{w^2}\right)^{\cdot} + \lambda\,[v - \mu\,q(s)\,u] = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit den Randbedingungen

$$\dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(1) = 0\,. \tag{3.5}$$

Die beiden Differentialgleichungen (3.4) sind einzeln selbstadjungiert; dagegen ist die Differentialgleichung vierter Ordnung in v, die man leicht aus ihnen herleitet, weder selbstadjungiert, noch gehört sie der Eingliedklasse an. Wir arbeiten deshalb zweckmäßigerweise mit dem System weiter. Die Randwertaufgabe lösen wir durch die beiden Integralgleichungen

$$v(s) = \nu^2 \int_0^1 G_1(s, t)\, u(t)\, dt, \tag{3.6}$$

$$u(s) = \lambda \int_0^1 G_2(s, t)\, [v(t) - \mu\, q(t)\, u(t)]\, dt \tag{3.7}$$

mit den symmetrischen *Green*schen Funktionen

$$G_1(s, t) = \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{Cof}\, \nu\, s\, \mathfrak{Cof}\, \nu(1-t)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\, \nu} & (s \leq t)\,, \\ \dfrac{\mathfrak{Cof}\, \nu(1-s)\, \mathfrak{Cof}\, \nu\, t}{\nu\, \mathfrak{Sin}\, \nu} & (s \geq t)\,, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$G_2(s, t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s w^2(\sigma)\, d\sigma & (s \leq t)\,, \\ \displaystyle\int_0^t w^2(\sigma)\, d\sigma & (s \geq t)\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

Man könnte nun $v(t)$ nach (3.6) in (3.7) einsetzen, um so eine Integralgleichung für $u(s)$ allein zu erhalten, was aber auf einen wenig übersichtlichen Ausdruck für den Kern dieser Integralgleichung führen würde. Wir ziehen es deshalb vor, einen anderen Weg zu wählen. Die Form der *Green*schen Funktion $G_2(s, t)$ legt nahe, eine Aufspaltung vorzunehmen. Man kann nämlich schreiben

$$G_2(s, t) = \int_0^1 M(s, \sigma)\, M(t, \sigma)\, d\sigma \tag{3.10}$$

mit dem unstetigen Kern

$$M(s, \sigma) = \begin{cases} 0 & (s < \sigma)\,, \\ w(\sigma) & (s > \sigma)\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Wir führen nun eine neue Funktion $y(s)$ durch die Integraltransformation

$$y(s) = \lambda \int_0^1 M(\sigma, s)\, [v(\sigma) - \mu\, q(\sigma)\, u(\sigma)]\, d\sigma \tag{3.12}$$

ein, der nach (3.7) und (3.10) die Umkehrung

$$u(s) = \int_0^1 M(s, \sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma \tag{3.13}$$

entspricht. Setzt man jetzt $v(t)$ in (3.12) ein, so folgt zunächst

$$\begin{aligned} y(s) &= \lambda \int_0^1 M(\sigma, s)\, [\nu^2 \int_0^1 G_1(\sigma, \tau)\, u(\tau)\, d\tau - \mu\, q(\sigma)\, u(\sigma)]\, d\sigma \\ &= \lambda \int_0^1 \int_0^1 M(\sigma, s)\, g(\sigma, \tau)\, u(\tau)\, d\tau\, d\sigma \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit

$$g(\sigma, \tau) = \nu^2\, G_1(\sigma, \tau) - \mu\, q(\tau)\, \delta(\sigma, \tau)\,, \tag{3.15}$$

wobei $\delta(\sigma, \tau)$ wie üblich, in Analogie zum algebraischen Symbol, eine Funktion bezeichnet, die für $\tau \neq \sigma$ identisch Null ist und die für $\tau = \sigma$ so unendlich wird, daß $\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} \delta(\sigma, \tau)\, d\tau$ existiert und den Wert 1 hat.

Auf Grund der Gleichung (3.12) erhält man so schließlich die Integralgleichung für $y(s)$

$$\left.\begin{aligned} y(s) &= \lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 M(\sigma, s)\, g(\sigma, \tau)\, M(\tau, t)\, y(t)\, d\sigma\, d\tau\, dt \\ &= \lambda \int_0^1 K(s, t)\, y(t)\, dt \end{aligned}\right| \tag{3.16}$$

mit dem symmetrischen, aber nicht positiv definiten Kern

$$K(s, t) = \int_0^1 \int_0^1 M(\sigma, s)\, g(\sigma, \tau)\, M(\tau, t)\, d\sigma\, d\tau\,. \tag{3.17}$$

Dieser Kern ist auch weitgehend explizit angebbar; so liefert die Ausrechnung für den ersten Teilkern den Ausdruck

$$\nu^2 \int_0^1 \int_0^1 M(\sigma, s)\, G_1(\sigma, \tau)\, M(\tau, t)\, d\sigma\, d\tau = \begin{cases} w(s)\, w(t) \left[1 - t - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\nu s\, \mathfrak{Sin}\,\nu(1-t)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\,\nu}\right] & (s \leq t)\,, \\ w(s)\, w(t) \left[1 - s - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\nu t\, \mathfrak{Sin}\,\nu(1-s)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\,\nu}\right] & (s \geq t)\,, \end{cases} \tag{3.18}$$

während beim zweiten Teilkern

$$\int_0^1 M(\sigma, s)\, q(\sigma) \cdot M(\sigma, t)\, d\sigma = \begin{cases} w(s)\, w(t) \left[1 - t + \displaystyle\int_t^1 \frac{\sin\vartheta(\sigma)}{w^2(\sigma)}\, d\sigma\right] & (s \leq t)\,, \\ w(s)\, w(t) \left[1 - s + \displaystyle\int_s^1 \frac{\sin\vartheta(\sigma)}{w^2(\sigma)}\, d\sigma\right] & (s \geq t) \end{cases} \tag{3.19}$$

eine Restintegration verbleibt.

Das Eigenwertproblem des Kippstabes ist damit abgebildet auf eine Integralgleichung mit dem symmetrischen Kern

$$K(s, t) = \begin{cases} w(s)\, w(t) \left\{1 - t - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\nu s\, \mathfrak{Sin}\,\nu(1-t)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\,\nu} - \mu \left[1 - t + \displaystyle\int_t^1 \frac{\sin\vartheta(\sigma)}{w^2(\sigma)}\, d\sigma\right]\right\} & (s \leq t)\,, \\ w(s)\, w(t) \left\{1 - s - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\nu t\, \mathfrak{Sin}\,\nu(1-s)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\,\nu} - \mu \left[1 - s + \displaystyle\int_s^1 \frac{\sin\vartheta(\sigma)}{w^2(\sigma)}\, d\sigma\right]\right\} & (s \geq t)\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Wenn auch eine exakte Bestimmung der Eigenfunktionen und Eigenwerte der Integralgleichung (3.16) kaum möglich sein dürfte, ja bereits die numerische Abgrenzung des kleinsten positiven Eigenwertes keine ganz leichte Aufgabe sein wird, so ist das Eigenwertproblem grundsätzlich mit Aufstellung der Integralgleichung (3.16) gelöst, bzw. in eine Form gebracht, die nicht nur elegant, sondern auch für numerische Rechnungen brauchbar ist. Es kam uns hier auch nicht darauf an, eine mehr oder weniger große Abweichung der Knicklast von den Werten auszurechnen, die im Schrifttum zu finden sind, sondern zu zeigen, daß das Stabilitätsproblem des Kippstabes noch einer Behandlung zugänglich ist, wenn man nicht, wie meist üblich, die Verformung, welche der Träger für die Grundlösung annimmt, vernachlässigt, sondern von einer exakten Grundlösung ausgeht, was eigentlich stets für die Untersuchung der Stabilität, d. h. der Eindeutigkeit einer speziellen Lösung zu fordern ist, praktisch aber nur in seltenen Fällen zu verwirklichen ist, weil diese Forderung die Untersuchung häufig ungebührlich erschwert, wenn nicht umöglich macht. Zu diesen seltenen Fällen, denen m. E. eine besondere erkenntnistheoretische Bedeutung zukommt, zählen, außer dem hier behandelten Freiträger, der auf Biegung beansprucht ist, unter anderen das Ausknicken des geraden Stabes sowie das Knickproblem der Hohlkugel, die durch gleichförmigen Außendruck beansprucht wird. Diese Beispiele zeichnen sich, ohne Zweifel bedingt durch ihre relative Einfachheit, aber auch durch die einwandfreie Formulierung im Rahmen der grundsätzlichen Voraussetzungen über die Ver-

formungen, durch die prägnante Form aus, welche die betreffenden Eigenwertprobleme erhalten, wenn man sie in zweckentsprechender Weise ansetzt.

Selbstverständlich sind in der Integralgleichung (3.16) bekannte Ansätze zum Stabilitätsproblem des Kippstabes als Näherungen enthalten. Es ist nun bemerkenswert, daß sich die exakte Gleichung (3.16) bereits wesentlich vereinfacht, wenn man die Durchbiegung der Trägerachse nicht vernachlässigt, sondern nur voraussetzt, daß sie klein genug bleibt, um $dx/ds = \cos\vartheta \approx 1$ zu setzen. Die Integralgleichung (3.16) geht dann über in

$$y(x) = \tilde{\lambda} \int_0^1 \tilde{K}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{3.21}$$

mit

$$\tilde{\lambda} = \lambda\, p^2\,, \tag{3.22}$$

$$\tilde{K}(x, \xi) = \begin{cases} x\,\xi(1-\xi) - \dfrac{1}{2}\mu\, x(1-\xi^2) - x\,\xi\, \dfrac{\mathfrak{Sin}\, \nu\, x\, \mathfrak{Sin}\, \nu(1-\xi)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\, \nu} & (x \leq \xi)\,, \\ x\,\xi(1-x) - \dfrac{1}{2}\mu\, \xi(1-x^2) - x\,\xi\, \dfrac{\mathfrak{Sin}\, \nu\, \xi\, \mathfrak{Sin}\, \nu(1-x)}{\nu\, \mathfrak{Sin}\, \nu} & (x \geq \xi)\,. \end{cases} \tag{3.23}$$

Der klassische, zuerst von *Prandtl* behandelte, Fall, entspricht dem Grenzfall $\nu \to \infty$ und $\mu \to 0$. Außer der Vernachlässigung des Einflusses einer Flanschenbiegung ($\nu \to \infty$) wird mit $\mu \to 0$ vorausgesetzt, daß $K_3 \gg K_1$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Grenzfall die untere Schranke für den Eigenwert $\tilde{\lambda}$ d. h. für die Kipplast liefert. Gleichung (3.21) reduziert sich in diesem Fall auf die Integralgleichung

$$y^{(1)}(x) = \tilde{\lambda}^{(1)} \int_0^1 \tilde{K}^{(1)}(x, \xi)\, y^{(1)}(\xi)\, d\xi \tag{3.24}$$

mit dem positiv definiten Kern

$$\tilde{K}^{(1)}(x, \xi) = \begin{cases} x\,\xi(1-\xi) & (x \leq \xi)\,, \\ x\,\xi(1-x) & (x \geq \xi)\,, \end{cases} \tag{3.25}$$

dessen Eigenwerte und normierte Eigenfunktionen gegeben sind durch

$$\tilde{\lambda}_i^{(1)} = 4\, \varrho_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3.26}$$

$$y_i^{(1)}(x) = x^{\frac{3}{2}}\, \frac{I_{-\frac{1}{4}}(\varrho_i\, x^2)}{I_{\frac{3}{4}}(\varrho_i)} \tag{3.27}$$

mit ϱ_i als Nullstellen der *Bessel*schen Funktion $I_{-\frac{1}{4}}(z)$. Die erste Nullstelle hat den Wert $\varrho_1 = 2.0063$ und liefert so die bekannte untere Schranke $\tilde{\lambda}_1^{(1)} = 16.101$.

Für $\mu \neq 0$ und endliches ν kann man zur numerischen Berechnung des kleinsten positiven Eigenwertes des Kernes (3.23) etwa das Verfahren von *L. Collatz* [1] heranziehen, wobei nur zu beachten ist, daß der Kern nicht definit ist. In unserem speziellen Falle erhält man schneller auf einem anderen Wege gute und ziemlich leicht zu berechnende Schranken für den kleinsten positiven Eigenwert, soweit dieser von Interesse ist. Es ist nämlich ohne größere Mühe möglich, den Kern nach dem vollständigen Funktionensystem

$$\varphi_\varrho(x) = \sqrt{2}\, \sin \varrho\, \pi\, x \quad (\varrho = 1, 2, \ldots) \tag{3.28}$$

zu entwickeln und die Entwicklungskoeffizienten explizit zu berechnen. Es gilt

$$\tilde{K}(x, \xi) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} a_{\varrho\sigma}\, \varphi_\varrho(x)\, \varphi_\sigma(\xi) \tag{3.29}$$

---

[1] *L. Collatz*, Math. Z. 46 (1940), S. 692.

mit

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{2\,\varrho\,\sigma(-1)^{\varrho+\sigma}(\varrho^2+\sigma^2)\,(2-\mu)}{\pi^4\,\varrho\,\sigma(\varrho^2-\sigma^2)^2} - \frac{4\,\varrho\,\sigma(-1)^{\varrho+\sigma}}{\pi^2(\varrho^2-\sigma^2)^2}\left(\frac{1}{\nu^2+\varrho^2\pi^2}+\frac{1}{\nu^2+\sigma^2\pi^2}\right)$$
$$-\frac{8\,\nu}{\mathfrak{Sin}\,\nu}\,\frac{\pi^2\,\varrho\,\sigma}{(\nu^2+\varrho^2\pi^2)^2\,(\nu^2+\sigma^2\pi^2)^2}\,[\mathfrak{Cof}\,\nu(1+\cos\varrho\pi\cos\sigma\pi)-(\cos\varrho\pi+\cos\sigma\pi)] \quad (\varrho\neq\sigma), \tag{3.30}$$

$$a_{\varrho\varrho} = \frac{1}{3\,\varrho^2\pi^2} - \frac{1}{3\,(\nu^2+\varrho^2\pi^2)} - \mu\left[\frac{2}{3\,\varrho^2\pi^2}+\frac{5}{4\,\varrho^4\pi^4}\right]$$
$$+\frac{\nu^2(5\,\nu^4+16\,\nu^2\varrho^2\pi^2+19\,\varrho^4\pi^4)}{2\,\varrho^4\pi^4(\nu^2+\varrho^2\pi^2)^3}+\frac{16\,\nu}{\mathfrak{Sin}\,\nu}\,\frac{\pi^2\varrho^2(\mathfrak{Cof}\,\nu-\cos\varrho\pi)}{(\nu^2+\varrho^2\pi^2)^4}. \tag{3.30a}$$

Der entsprechende Ansatz

$$y(x) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} c_\varrho\,\varphi_\varrho(x) \tag{3.31}$$

mit der Nebenbedingung

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} c_\varrho^2 = 1 \tag{3.32}$$

führt mit $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$ auf die Säkulargleichung

$$|a_{\varrho\sigma} - \varkappa\,\delta_{\varrho\sigma}| = 0\,. \tag{3.33}$$

Berücksichtigt man nur n Zeilen und Spalten der Determinante (3.33), d. h. approximiert man den Kern (3.23) durch einen ausgearteten Kern, so sind nach bekannten Sätzen die $\varkappa_i^{(n)}$ gleich den Eigenwerten der quadratischen Form

$$\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}\,c_\varrho\,c_\sigma \tag{3.34}$$

mit der Nebenbedingung

$$\sum_{\varrho=1}^{n} c_\varrho^2 = 1\,. \tag{3.35}$$

und das Maximum $\varkappa_1^{(n)}$ ist kleiner als der reziproke Wert des kleinsten positiven Eigenwerts, so daß man auf diese Weise obere Schranken für den ersten positiven Eigenwert erhält.

Es sollen hier nur die beiden Grenzfälle $\nu\to\infty$ und $\nu\to 0$ näher betrachtet werden. Für $\nu\to\infty$ hat man den Kern

$$\tilde{K}^{(2)}(x,\xi) = \begin{cases} x\,\xi(1-\xi)-\frac{1}{2}\mu\,x(1-\xi^2) & (x\leq\xi)\,, \\ x\,\xi(1-x)-\frac{1}{2}\mu\,\xi(1-x^2) & (x\geq\xi)\,. \end{cases} \tag{3.36}$$

Bereits der Ersatz von (3.33) durch eine zweireihige Determinante liefert gute Näherungswerte, die durch Hinzunahme einer weiteren Zeile und Spalte zu ausgezeichneten oberen Schranken, innerhalb des in Betracht kommenden Intervalls von μ, verbessert werden. Die anderen beiden Wurzeln der Gleichung dritten Grades können zur Verbesserung der unteren Schranken herangezogen werden, die aus der Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\tilde{\lambda}_i^{(2)}\right]^2} = \int_0^1\int_0^1 [\tilde{K}^{(2)}(x,\xi)]^2\,dx\cdot d\xi = \frac{1}{4\cdot 63}-\mu\cdot\frac{13}{20\cdot 63}+\frac{\mu^2}{144} \tag{3.37}$$

zu entnehmen sind. Einige so errechnete Schranken finden sich in Tabelle 1

Tabelle 1.

μ	$\tilde{\lambda}_{1\,u}^{(2)} < \tilde{\lambda}_1^{(2)} < \tilde{\lambda}_{10}^{(2)}$	
0,0	16,059	16,107
0,1	18,419	18,477
0,2	21,574	21,648
0,3	25,991	26,094
0,5	43,283	43,607

Eine anschauliche Vorstellung über die Verteilung der Eigenwerte erhält man, wenn man $\Lambda_1 = \tilde{\lambda}_1^{(2)}$, $\Lambda_2 = -\mu\,\tilde{\lambda}_1^{(2)}$ als Kurve in einer (Λ_1, Λ_2)-Ebene aufträgt (Abb. 1). Von der ersten Eigenkurve kennt man zwei Punkte exakt, einmal den Punkt $\Lambda_1 = 16{,}101$; $\Lambda_2 = 0$ und zweitens den Punkt $\Lambda_1 = -\pi^2$; $\Lambda_2 = 2\,\pi^2$; denn für $\mu = 2$ erhält man aus (3.36) den Kern

$$\tilde{K}^{(3)}(x,\xi) = \begin{cases} -x(1-\xi) & (x\leq\xi)\,, \\ -\xi(1-x) & (x\geq\xi)\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

welcher die Eigenwerte

$$\tilde{\lambda}_\varrho^{(3)} = -\varrho^2\pi^2 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

besitzt. Die erste Eigenkurve weicht recht wenig von einer Geraden ab, so daß die Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$\frac{\Lambda_1}{16.101} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{16.101}\right)\Lambda_2 = 1 \tag{3.39}$$

bereits eine gute Näherung für die erste Eigenkurve liefert, was im vierten Quadranten zu der Abschätzung führt

$$\tilde{\lambda}_1^{(2)} \leq \frac{16.101}{1 - 1.3157\,\mu}\,. \tag{3.40}$$

Durch die Tangente im Punkte $\Lambda_1 = 16{,}101$; $\Lambda_2 = 0$ wird diese Beziehung verbessert zu

$$\tilde{\lambda}_1^{(2)} \leq \frac{16.101}{1 - 1.28162\,\mu}\,, \tag{3.41}$$

und der Vergleich mit der Tabelle zeigt, daß die Tangente für das Intervall $0 \leq \mu \leq 0.5$ recht gute Näherungswerte liefert (Tabelle 2).

Die Eigenwerte wachsen mit μ rasch an. Für $\mu > \approx 0{,}8$ liefert die erste Eigenkurve keine positiven Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1^{(2)}$ mehr, so daß erst die Schnittpunkte der Geraden $\mu =$ konst. mit den Eigenkurven höherer Ordnung wieder positive Eigenwerte liefern können. Für $\mu \geq 1$ ist der Kern negativ definit, hat also nur negative Eigenwerte. Wenn auch physikalisch nur der Bereich $\mu \ll 1$ in Betracht kommt, so liegt doch bereits für $\mu = 0.2$; d. h. wenn die Biegesteifigkeit K_3 den fünffachen Wert der Torisonssteifigkeit K_1 hat, der Eigenwert um etwa 30% und die Kipplast um etwa 15% über der unteren Schranke ($\mu \to 0$).

Tabelle 2.

μ	$\tilde{\lambda}_1^{(2)}$ [Sehne]	$\tilde{\lambda}_1^{(2)}$ [Tangente]
0,1	18,54	18,47
0,2	21,85	21,65
0,3	26,60	26,16
0,5	47,06	44,83

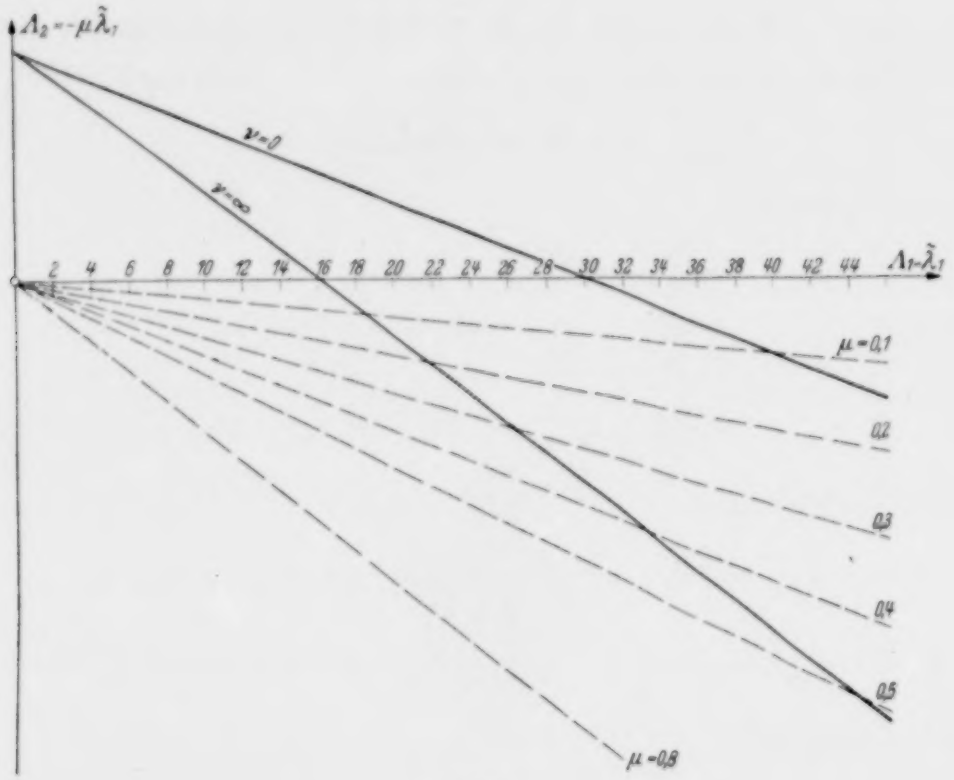


Abb. 1.

Durch ein endliches ν erhöht sich noch jeweils die Kipplast. Wir beschränken uns auf eine Abschätzung der oberen Schranke ($\nu \to 0$). Für $\nu \to 0$ erhält man aus (3.23)

$$\tilde{K}^{(4)}(x, \xi) = \begin{cases} x(1-x)\,\xi(1-\xi) - \frac{1}{2}\mu\, x(1-\xi^2) & (x \leq \xi)\,, \\ x(1-x)\,\xi(1-\xi) - \frac{1}{2}\mu\, \xi(1-x^2) & (x \geq \xi)\,. \end{cases} \tag{3.42}$$

Der von μ freie Teil des Kernes ist entartet und man hat für $\mu = 0$ nur den einen Eigenwert $\tilde{\lambda}_1^{(4)} = 30$.

Alle Eigenkurven gehen durch den Punkt $\Lambda_1 = 30$; $\Lambda_2 = 0$. Die Tangente in diesem Punkt ist wieder eine brauchbare Approximation der ersten Eigenkurve und liefert die Abschätzung

$$\tilde{\lambda}_1^{(4)} \leq \frac{30}{1 - 2.411\,\mu}. \tag{3.43}$$

4. Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß die Lösung der Eigenwertaufgabe für die Kipplast eines Freiträgers, auch für die exakte Grundlösung, d. h. bei Berücksichtigung der Verformung der Trägerachse, und einschließlich eines zusätzlichen Torsionsmoments (etwa Einfluß einer Flanschenverbiegung) durch eine Integralgleichung mit symmetrischem, explizit angebbaren Kern dargestellt werden kann.

Ausgangspunkt ist ein Variationsproblem, das sich aus dem Prinzip des Minimums der potentiellen Energie herleitet, und das zweckmäßigerweise als *Lagrange*sches Problem formuliert wird. Die der zweiten Variation zugeordneten *Jacobi*schen Gleichungen werden über ein erstes Integral auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückgeführt. Die Randwertaufgabe wird über zwei *Green*sche Funktionen gelöst, und es wird durch geeignete Integraltransformationen schließlich eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern abgeleitet.

(Eingegangen am 2. Mai 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. A. Deuker*, 14 Allée du Chateau d'Eau. Forêt de Vernon. par Vernon (Eure), Frankreich.

Berichtigung

zu meiner Arbeit in Bd. XIX, S. 313 des Ingenieur-Archivs: „Strömung im Übergangsraum der Wasserturbinen".

Von **M. Strscheletzky.**

Die Gleichungen (17) lauten

$$c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_z}{\partial r} = -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$c_z \frac{\partial c_r}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_u^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r},$$
$$c_z \frac{\partial c_u}{\partial z} + c_r \frac{\partial c_u}{\partial r} + \frac{c_u c_r}{r} = 0$$

oder nach einigen Umbildungen

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{p}{\varrho} + g z\right) &= \frac{c_u^2}{r}dr - \frac{c_m^2}{R}db \text{ gilt längs der Normallinie } b, \\ d\left(\frac{c_m^2}{2} + \frac{c_u^2}{2} + g l_z + \frac{p}{\varrho}\right) &= 0 \text{ gilt längs der Stromlinie } l_m. \end{aligned}\right| \tag{17}$$

Daraus folgt Gleichung (18).

(Eingegangen am 2. November 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *M. Strscheletzky*, (14b) Friedrichshafen, Ernst-Lehmann-Str. 21.